

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
Тульский государственный университет

Кафедра математического анализа

РУДКЕВИЧ Е.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения, 1 семестр

Тула 2006

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА.

ЗАДАНИЕ 1.

Дана система линейных уравнений. Решить систему тремя способами: 1) методом

Крамера, 2) методом Гаусса, 3) матричным методом.
$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 + 5x_3 = 62 \\ -8x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 71 \\ -10x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -37 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

1) Метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 5 \\ -8 & -7 & 8 \\ -10 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = 93;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 62 & -1 & 5 \\ 71 & -7 & 8 \\ -37 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 62 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 71 & 8 \\ -37 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 71 & -7 \\ -37 & -2 \end{vmatrix} = 372;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 62 & 5 \\ -8 & 71 & 8 \\ -10 & -37 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 71 & 8 \\ -37 & -3 \end{vmatrix} - 62 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 71 \\ -10 & -37 \end{vmatrix} = -837;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 62 \\ -8 & -7 & 71 \\ -10 & -2 & -37 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 71 \\ -2 & -37 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -8 & 71 \\ -10 & -37 \end{vmatrix} + 62 \cdot \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = 465;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{372}{93} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-837}{93} = -9; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{465}{93} = 5.$$

Итак, решение системы: $x_1 = 4$, $x_2 = -9$, $x_3 = 5$.

2) Метод Гаусса.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc} 7 & -1 & 5 & 62 \\ -8 & -7 & 8 & 71 \\ -10 & -2 & -3 & -37 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{+} \\ \swarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 7 & -1 & 5 & 62 \\ -1 & -8 & 13 & 133 \\ -10 & -2 & -3 & -37 \end{array} \right) \begin{array}{c} \nwarrow \boxed{7} \boxed{-10} \\ \swarrow \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc} 0 & -57 & 96 & 993 \\ 1 & 8 & -13 & -133 \\ 0 & 78 & -133 & -1367 \end{array} \right) \begin{array}{c} \updownarrow \boxed{: -3} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 8 & -13 & -133 \\ 0 & 19 & -32 & -331 \\ 0 & 78 & -133 & -1367 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{78} \\ \boxed{19} \end{array} \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 8 & -13 & -133 \\ 0 & 1482 & -2496 & -25818 \\ 0 & 1482 & -2527 & -25973 \end{array} \right) \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \swarrow \end{array} \boxed{: 78} \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 8 & -13 & -133 \\ 0 & 19 & -32 & -331 \\ 0 & 0 & -31 & -155 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Последней матрице соответствует система:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 13x_3 = -133 \\ 19x_2 - 32x_3 = -331 \\ -31x_3 = -155 \end{cases}$$

Решая эту систему с конца, получим:

$$\begin{cases} x_3 = 5 \\ x_2 = \frac{1}{19}(-331 + 32x_3) = -9 \\ x_1 = -133 - 8x_2 + 13x_3 = 4 \end{cases}$$

Итак, опять получили: $x_1 = 4$, $x_2 = -9$, $x_3 = 5$.

3) Матричный метод.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 \\ -8 & -7 & 8 \\ -10 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 62 \\ 71 \\ -37 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Система имеет вид $Ax = b$. Тогда $x = A^{-1}b$. Найдем матрицу A^{-1} .

$$|A| = 93.$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 37; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -13; & A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = 27; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} = -104; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} = 29; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} = -96; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -8 & -7 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = -54; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = 24; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -8 & -7 \end{vmatrix} = -57; \end{aligned}$$

Обратная матрица:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{93} \begin{pmatrix} 37 & -13 & 27 \\ -104 & 29 & -96 \\ -54 & 24 & -57 \end{pmatrix} \\ x &= \frac{1}{93} \begin{pmatrix} 37 & -13 & 27 \\ -104 & 29 & -96 \\ -54 & 24 & -57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 62 \\ 71 \\ -37 \end{pmatrix} = \frac{1}{93} \begin{pmatrix} 372 \\ -837 \\ 465 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Итак, опять получили: $x_1 = 4$, $x_2 = -9$, $x_3 = 5$.

ЗАДАНИЕ 2.

Даны два линейных преобразования. Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее z_1 , z_2 , z_3 через x_1 , x_2 , x_3 .

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 7x_2 \\ y_2 = 6x_1 - 8x_2 - 2x_3 \\ y_3 = 9x_1 + 10x_2 - 4x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = -2y_1 + 4y_2 + 9y_3 \\ z_2 = -3y_1 - 4y_2 + 4y_3 \\ z_3 = 3y_2 - y_3 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Пусть

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 6 & -8 & -2 \\ 9 & 10 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ -3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$y = Ax$, $z = By$. Тогда $z = BAx$. Находим:

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 9 \\ -3 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 6 & -8 & -2 \\ 9 & 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109 & 44 & -44 \\ 18 & 51 & -8 \\ 9 & -34 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} z_1 = 109x_1 + 44x_2 - 44x_3 \\ z_2 = 18x_1 + 51x_2 - 8x_3 \\ z_3 = 9x_1 - 34x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 3.

Даны координаты вершин пирамиды $A_1(-4, 9, 9)$; $A_2(-10, -7, -7)$; $A_3(-1, 4, -4)$; $A_4(3, 8, -5)$. С помощью векторной алгебры найти: 1) длину ребра A_1A_2 и направляющие косинусы вектора $\overline{A_1A_2}$; 2) проекцию вектора $\overline{A_3A_4}$ на вектор $\overline{A_1A_2}$; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$ и ее высоту, проведенную из вершины A_3 ; 4) угол между ребрами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$; 5) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ и ее высоту, проведенную из вершины A_4 .

РЕШЕНИЕ.

1) $\overline{A_1A_2} = (-6; -16; -16)$.

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(-6)^2 + (-16)^2 + (-16)^2} = \sqrt{548} \approx 23,409.$$

Направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{-6}{|\overline{A_1A_2}|} = \frac{-6}{\sqrt{548}} \approx -0,256; \\ \cos \beta &= \frac{-16}{|\overline{A_1A_2}|} = \frac{-16}{\sqrt{548}} \approx -0,683; \\ \cos \gamma &= \frac{-16}{|\overline{A_1A_2}|} = \frac{-16}{\sqrt{548}} \approx -0,683. \end{aligned}$$

2) Проекцию найдем по формуле:

$$\text{Пр}_{\overline{b}} \overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|}.$$

$$\overline{A_3A_4} = (4; 4; -1).$$

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4} = -6 \cdot 4 - 16 \cdot 4 - 16 \cdot (-1) = -72.$$

Тогда

$$\text{Пр}_{\overline{A_1A_2}} \overline{A_3A_4} = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_3A_4}}{|\overline{A_1A_2}|} = \frac{-72}{\sqrt{548}} \approx -3,076.$$

3) Площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$, найдем по формуле:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}|.$$

$$\overline{A_1A_3} = (3; -5; -13).$$

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_2} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -6 & -16 & -16 \\ 3 & -5 & -13 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \begin{vmatrix} -16 & -16 \\ -5 & -13 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} -6 & -16 \\ 3 & -13 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} -6 & -16 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 128\bar{i} - 126\bar{j} - 78\bar{k}.\end{aligned}$$

$$|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_2}| = \sqrt{128^2 + (-126)^2 + (-78)^2} = \sqrt{38344} \approx 195,816.$$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{\sqrt{38344}}{2} \approx 97,908.$$

Если h — высота треугольника $A_1A_2A_3$, то $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}h \cdot |\overline{A_1A_2}|$. Следовательно, высота равна:

$$h = \frac{2S_{A_1A_2A_3}}{|\overline{A_1A_2}|} = \frac{\sqrt{38344}}{\sqrt{548}} \approx 8,365.$$

4) Другое выражение для модуля векторного произведения:

$$|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_2}| = |\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_3}| \sin \varphi,$$

где φ — угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$.

$$|\overline{A_1A_3}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-13)^2} = \sqrt{203}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_2}|}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_3}|} = \frac{\sqrt{38344}}{\sqrt{548}\sqrt{203}} \approx 0,587. \\ \varphi &\approx 35^\circ 57' .\end{aligned}$$

5) Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ и $\overline{A_1A_4}$, найдем по формуле:

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6} |\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4}|.$$

$$\overline{A_1A_4} = (7; -1; -14).$$

$$\begin{aligned}\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \cdot \overline{A_1A_4} &= \begin{vmatrix} -6 & -16 & -16 \\ 3 & -5 & -13 \\ 7 & -1 & -14 \end{vmatrix} = \\ &= -6 \begin{vmatrix} -5 & -13 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} 3 & -13 \\ 7 & -14 \end{vmatrix} - 16 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -70.\end{aligned}$$

Тогда

$$V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} \approx 11,667.$$

Если H — высота пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, то $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{3}S_{A_1A_2A_3}H$. Следовательно, высота равна:

$$H = \frac{3V_{A_1A_2A_3A_4}}{S_{A_1A_2A_3}} = \frac{35}{\sqrt{38344}/2} \approx 8,357.$$

ЗАДАНИЕ 4.

Даны три точки $A(-2; 5)$, $B(6; 1)$ и $C(4; -1)$. Найти: 1) вершину D параллелограмма $ABCD$; 2) угол между диагоналями параллелограмма; 3) уравнение окружности, описанной около треугольника ABC ; 4) каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку A , эксцентриситет которого равен $\varepsilon = 2/\sqrt{5}$. Обязательно сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ.

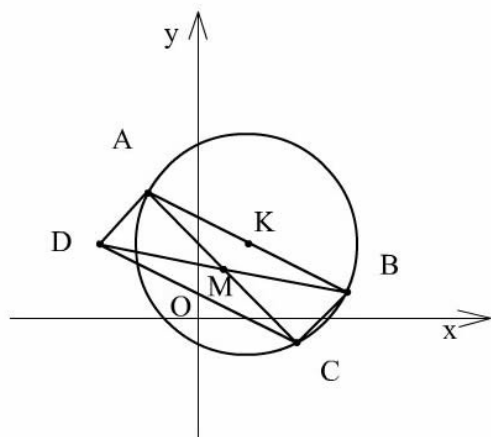


Рис. 1

1) Точка M — точка пересечения диагоналей параллелограмма (рис. 1). Эта точка является серединой отрезка AC . Поэтому

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = 1;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Итак, $M(1; 2)$.

Точка M также является серединой отрезка BD , поэтому

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow$$

$$x_D = 2x_M - x_B = 2 \cdot 1 - 6 = -4;$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 2y_M - y_B = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

Получили координаты точки $D(-4; 3)$.

2) Найдем угловые коэффициенты прямых AC и BD :

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-2 - 5}{4 + 2} = -1;$$

$$k_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{3 - 1}{-4 - 6} = -\frac{1}{5}.$$

Тангенс угла между прямыми:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|k_{AC} - k_{BD}|}{1 + k_{AC}k_{BD}} = \frac{|-1 + \frac{1}{5}|}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{2}{3}.$$

Откуда

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \approx 33^\circ 41'.$$

3) Пусть $K(x, y)$ — координаты центра окружности. Тогда

$$KA^2 = KB^2$$

$$KA^2 = KC^2$$

Получаем:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-5)^2 = (x-6)^2 + (y-1)^2 \\ (x+2)^2 + (y-5)^2 = (x-4)^2 + (y+1)^2 \end{cases}$$

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 \\ x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x - 8y = 8 \\ 12x - 12y = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Итак, координаты центра окружности $K(2; 3)$.

Радиус окружности:

$$R = KA = \sqrt{(2+2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{20}.$$

Получаем уравнение окружности:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 20.$$

4) Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Подставим в это уравнение координаты точки A :

$$\frac{4}{a^2} + \frac{25}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Значит, $c = a \cdot \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{5}}a$. Так как $b^2 = a^2 - c^2$, то $b^2 = a^2 - \frac{4}{5}a^2 = \frac{1}{5}a^2$. Подставим в (1):

$$\frac{4}{a^2} + \frac{25 \cdot 5}{a^2} = 1.$$

Отсюда $a^2 = 129$. Тогда $b^2 = \frac{129}{5}$. Получаем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{129} + \frac{y^2}{129/5} = 1.$$

Эллипс изображен на рис. 2.

ЗАДАНИЕ 5.

Даны уравнения прямой $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}$ и плоскости $P : 2y + 4z - 1 = 0$.

Найти 1) угол между прямой и плоскостью; 2) уравнение плоскости, проходящей

через прямую l перпендикулярно плоскости; 3) уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; -2; 0)$ параллельно прямой l ; 4) координаты точки M' , симметричной точке M относительно плоскости P .

РЕШЕНИЕ.

1) Угол между прямой и плоскостью найдем по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{a}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{a}|}.$$

Направляющий вектор прямой l — $\bar{a} = (1; -1; 1)$, нормальный вектор плоскости P — $\bar{n} = (0; 2; 4)$.

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot \bar{n} &= 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2; \\ |\bar{a}| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}; \\ |\bar{n}| &= \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \approx 0,258. \\ \varphi &\approx 14^\circ 57' .\end{aligned}$$

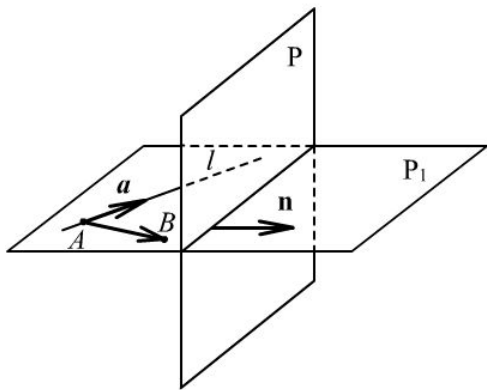


Рис. 3

2) Пусть точка $B(x, y, z)$ лежит в искомой плоскости P_1 (рис. 3). Плоскость проходит через точку $A(1; -1,5; 0)$, лежащую на прямой l . Векторы $\overline{AB} = (x - 1; y + 1,5; z)$, $\bar{a} = (1; -1; 1)$ и $\bar{n} = (0; 2; 4)$ компланарны. Условие компланарности: $\overline{AB} \cdot \bar{a} \cdot \bar{n} = 0$. Получаем:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \bar{a} \cdot \bar{n} &= \begin{vmatrix} x-1 & y+1,5 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (y+1,5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -6(x-1) - 4(y+1,5) + 2z = \\ &= -6x + 6 - 4y - 6 + 2z = 0.\end{aligned}$$

Получаем:

$$-3x - 2y + z = 0$$

— уравнение плоскости P_1 .

3) Направляющий вектор прямой l_1 совпадает с направляющим вектором прямой l и равен $\bar{a} = (1; -1; 1)$. Канонические уравнения прямой l_1 :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}.$$

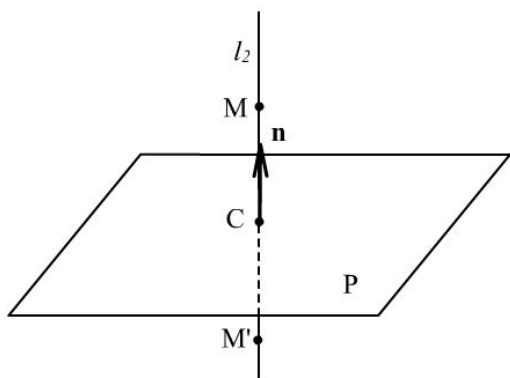


Рис. 4

4) Найдем уравнение прямой l_2 , проходящей через точку M перпендикулярно плоскости P (рис. 4). Направляющий вектор прямой l_2 совпадает с нормальным вектором плоскости P . Параметрические уравнения прямой l_2 :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$$

Найдем координаты точки C — точки пересечения прямой l_2 и плоскости P — из системы

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 + 2t \\ z = 4t \\ 2y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

Подставим значения для x , y и z из первых трех уравнений в четвертое:

$$2(-2 + 2t) + 4 \cdot 4t - 1 = 0.$$

Отсюда $t = \frac{1}{4}$. Тогда $x = 2$, $y = -1,5$, $z = 1$.

Итак, $C(2; -1,5; 1)$.

Точка C — середина MM' .

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{x_M + x_{M'}}{2} &\Rightarrow & x_{M'} = 2x_C - x_M = 2 \cdot 2 - 2 = 2; \\ y_C &= \frac{y_M + y_{M'}}{2} &\Rightarrow & y_{M'} = 2y_C - y_M = 2 \cdot (-1,5) + 2 = -1; \\ z_C &= \frac{z_M + z_{M'}}{2} &\Rightarrow & z_{M'} = 2z_C - z_M = 2 \cdot 1 - 0 = 2. \end{aligned}$$

Итак, $M'(2; -2; 2)$.

ЗАДАНИЕ 6.

Записать данное комплексное число $z = \frac{4i}{3i - \sqrt{3}}$ в алгебраической и тригонометрической формах и найти все корни уравнения $w^3 - z = 0$.

РЕШЕНИЕ.

$$z = \frac{4i}{3i - \sqrt{3}} = \frac{4i(-3i - \sqrt{3})}{(3i - \sqrt{3})(-3i - \sqrt{3})} = \frac{12 - 4i\sqrt{3}}{3 + 9} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Это алгебраическая форма комплексного числа z .

Модуль:

$$|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Аргумент найдем из системы:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Значит, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Получаем тригонометрическую форму комплексного числа:

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

Решим уравнение. Если $w^3 - z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$. Решения имеют вид:

$$w_k = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{3} \right), \text{ где } k = 0, 1, 2.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{18} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{18} \right) \right); \\ w_1 &= \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \left(\cos \left(\frac{11\pi}{18} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{18} \right) \right); \\ w_2 &= \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \left(\cos \left(\frac{23\pi}{18} \right) + i \sin \left(\frac{23\pi}{18} \right) \right) = \sqrt[6]{\frac{4}{3}} \left(\cos \left(-\frac{13\pi}{18} \right) + i \sin \left(-\frac{13\pi}{18} \right) \right); \end{aligned}$$

В последнем выражении аргумент приведен к главному значению.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

ЗАДАНИЕ 7.

Вычислить пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16}$ при 1) $a = 4$; 2) $a = -1$ и 3) $a = \infty$.

РЕШЕНИЕ.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+5)}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{x+4} = \frac{4+5}{4+4} = \frac{9}{8};$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16} = \frac{(-1)^2 - 1 - 20}{(-1)^2 - 16} = \frac{4}{3};$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2}}{1 - \frac{16}{x^2}} = 1.$$

$$б) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - 4}{x^2 - 4}.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10}-4}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+10-16}{(x-2)(x+2)(\sqrt{3x+10}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{3x+10}+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x+2)(\sqrt{3x+10}+4)} = \\ &= \frac{3}{(2+2)(4+4)} = \frac{3}{32}.\end{aligned}$$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$

РЕШЕНИЕ.

Пусть $t = x - 1$, тогда $x = t + 1$. При $x \rightarrow 1$ $t \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{t \rightarrow 0} (-t) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2}(t+1) \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (-t) \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\operatorname{tg} \frac{\pi t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\pi t/2}{\sin(\pi t/2)} \cdot \left(-\frac{2}{\pi} \right) \cdot \cos \frac{\pi t}{2} = -\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Здесь мы использовали первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}.$

РЕШЕНИЕ.

Используем второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4} \cdot \frac{4}{x-1} \cdot (x-4)} = \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x-4)}{x-1} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(1 - \frac{4}{x})}{1 - \frac{1}{x}} \right) = e^4.\end{aligned}$$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1}.$

РЕШЕНИЕ.

При $x \rightarrow \infty$

$$\arcsin 2x \sim 2x; 2^{-3x} - 1 \sim -3x \ln 2.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-3x \ln 2} = -\frac{2}{3 \ln 2}.$$

ЗАДАНИЕ 8.

Для данной функции найти точки разрыва, если они существуют. Сделать чертеж.

$$y = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ \cos x, & -1 < x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

На интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}; +\infty)$ функция непрерывна. Возможные точки разрыва: $x_1 = -1$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

$x_1 = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0; \\ f(-1-0) &= \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (x+1) = 0; \\ f(-1+0) &= \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} \cos x = \cos 1. \end{aligned}$$

Так как $f(-1+0) \neq f(-1-0)$, но оба предела конечны, то $x_1 = -1$ — точка разрыва первого рода.

$$x_2 = \frac{\pi}{2}:$$

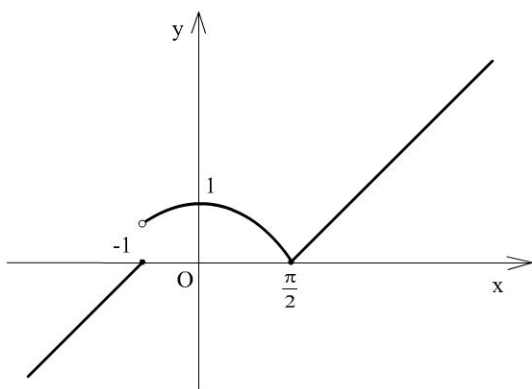


Рис. 5

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0; \\ f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \cos x = 0; \\ f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Так как $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = f\left(\frac{\pi}{2}+0\right)$, то в точке $x_2 = \frac{\pi}{2}$ функция непрерывна. График функции изображен на рис. 5.

ЗАДАНИЕ 9.

Установить, являются ли данные функции непрерывными или разрывными в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = -6$. В случае разрыва найти их пределы в точке разрыва слева и справа, установить тип разрыва. Сделать схематический чертеж.

$$y_1 = 11^{\frac{1}{x+6}}; \quad y_2 = \frac{x^2 + x + 1}{6 + x}.$$

РЕШЕНИЕ.

$$y_1 = 11^{\frac{1}{x+6}}.$$

$$y_1(1) = 11^{1/7};$$

$$y_1(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 11^{\frac{1}{x+6}} = 11^{1/7};$$

$$y_1(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 11^{\frac{1}{x+6}} = 11^{1/7}.$$

Так как $y_1(1) = y_1(1-0) = y_1(1+0)$, то функция $y_1(x)$ непрерывна в точке $x_1 = 1$.

В точке $x_2 = -6$ функция не определена. Значит, это точка разрыва.

$$y_1(-6-0) = \lim_{x \rightarrow -6-0} 11^{\frac{1}{x+6}} = (11^{-\infty}) = 0;$$

$$y_1(-6+0) = \lim_{x \rightarrow -6+0} 11^{\frac{1}{x+6}} = (11^{+\infty}) = +\infty.$$

В точке $x_2 = -6$ функция $y_1(x)$ терпит разрыв второго рода.

График функции изображен на рис. 6.

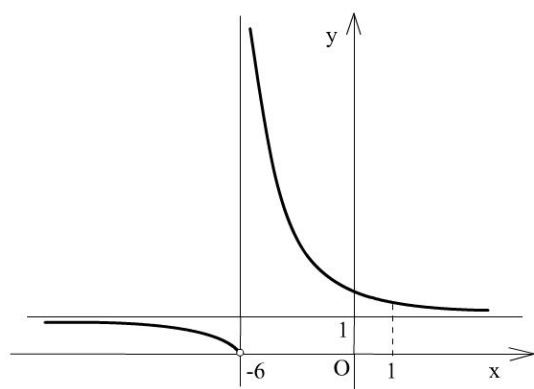


Рис. 6

$$y_2 = \frac{x^2 + x + 1}{6 + x}.$$

$$y_2(1) = \frac{3}{7};$$

$$y_2(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + x + 1}{6 + x} = \frac{3}{7};$$

$$y_2(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + x + 1}{6 + x} = \frac{3}{7}.$$

Так как $y_2(1) = y_2(1-0) = y_2(1+0)$, то функция $y_2(x)$ непрерывна в точке $x_1 = 1$.

В точке $x_2 = -6$ функция не определена. Значит, это точка разрыва.

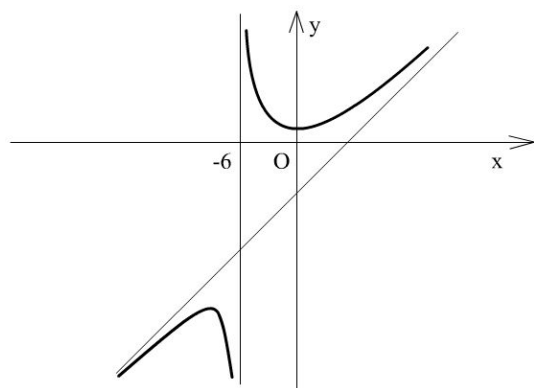


Рис. 7

$$y_2(-6-0) = \lim_{x \rightarrow -6-0} \frac{x^2 + x + 1}{6 + x} = -\infty;$$

$$y_2(-6+0) = \lim_{x \rightarrow -6+0} \frac{x^2 + x + 1}{6 + x} = +\infty.$$

В точке $x_2 = -6$ функция $y_2(x)$ терпит разрыв второго рода. График функции изображен на рис. 7.

ЗАДАНИЕ 10.

Найти производные $\frac{dy}{dx}$ заданных функций. В пункте д) функция задана неявно.

а) $y = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

РЕШЕНИЕ.

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}.$$

б) $y = (x^3 + \operatorname{tg}^3 2x)^2.$

РЕШЕНИЕ.

$$y' = 2(x^3 + \operatorname{tg}^3 2x) \left(3x^2 + 3 \operatorname{tg}^2 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 \right) = 6(x^3 + \operatorname{tg}^3 2x) \left(x^2 + \frac{2 \sin^2 2x}{\cos^4 2x} \right).$$

в) $y = x \cdot \arcsin(\cos 0,5x).$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} y' &= \arcsin(\cos 0,5x) + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 0,5x}} \cdot (-\sin 0,5x) \cdot 0,5 = \\ &= \arcsin(\cos 0,5x) - \frac{0,5x \sin 0,5x}{\sin 0,5x} = \arcsin(\cos 0,5x) - 0,5x. \end{aligned}$$

г) $y = (x+2)^{\operatorname{ctg} x}.$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \ln y &= \operatorname{ctg} x \ln(x+2) \\ (\ln y)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \ln(x+2) + \frac{\operatorname{ctg} x}{x+2} \\ y' &= y(\ln y)' = (x+2)^{\operatorname{ctg} x} \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x+2} - \frac{\ln(x+2)}{\sin^2 x} \right). \end{aligned}$$

д) $xy^2 - y^3 = 4x - 5.$

РЕШЕНИЕ.

$$y^2 + 2xyy' - 3y^2y' = 4.$$

Выражаем из этого равенства y' :

$$(2xy - 3y^2)y' = 4 - y^2.$$

Отсюда

$$y' = \frac{4 - y^2}{y(2x - 3y)}.$$

ЗАДАНИЕ 11.

Найти производные $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Находим:

$$\begin{aligned} x'_t &= \frac{1}{2\sqrt{t}}; \\ y'_t &= \frac{1}{2\sqrt{(1-t)^3}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(1-t)^3}}.$$

Пусть $u(t) = \frac{dy}{dx}(t)$. Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = \frac{u'_t}{x'_t}.$$

Находим:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^3}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{(1-t)^5}} = \frac{(1-t) + 3t}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^5}} = \frac{2t+1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^5}}.$$

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2t+1) \cdot 2\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^5}} = \frac{2t+1}{\sqrt{(1-t)^5}}.$$

ЗАДАНИЕ 12.

Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \frac{x^2}{10} + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

РЕШЕНИЕ.

Находим:

$$\begin{aligned}x_0 &= 2; \\ y_0 &= y(x_0) = \frac{17}{5}.\end{aligned}$$

Далее,

$$y'(x) = \frac{x}{5},$$

поэтому

$$y'(x_0) = \frac{2}{5}.$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).$$

В нашем случае

$$y = \frac{17}{5} + \frac{2}{5}(x - 2),$$

или

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{13}{5}.$$

Уравнение нормали имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

В нашем случае

$$y = \frac{17}{5} - \frac{5}{2}(x - 2),$$

или

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{42}{5}.$$