

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации  
Тульский государственный университет

Кафедра математического анализа

РУДКЕВИЧ Е.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ  
ПО МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения, 3 семестр

Тула 2006

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

### ЗАДАНИЕ 1.

а) Найти общее решение уравнения:

$$y^3(y-1) dx + 3xy^2(y-1) dy = (y+2) dy$$

### РЕШЕНИЕ.

Преобразуем уравнение, разделив его на  $y^3(y-1) dy$ . Получим:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{3x}{y} = \frac{y+2}{y^3(y-1)}. \quad (1)$$

Это линейное уравнение относительно функции  $x(y)$ .

Пусть  $x(y) = u \cdot v$ . Тогда  $x' = u'v + uv'$ . Подставим в (1):

$$u'v + uv' + \frac{3uv}{y} = \frac{y+2}{y^3(y-1)}.$$

Разобьем полученное уравнение на 2 части:

$$u'v + \frac{3uv}{y} = 0; \quad (2)$$

$$uv' = \frac{y+2}{y^3(y-1)}. \quad (3)$$

Найдем частное решение уравнения (2). Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= -\frac{3u}{y} \\ \int \frac{du}{u} &= -\int \frac{3dy}{y} \\ \ln |u| &= -3 \ln |y| \\ u &= \frac{1}{y^3} \end{aligned}$$

Подставим найденную функцию в (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^3} v' &= \frac{y+2}{y^3(y-1)} \\ v' &= \frac{y+2}{y-1} \end{aligned}$$

Находим:

$$v = \int \frac{y+2}{y-1} dy = \int \left( 1 + \frac{1}{y-1} \right) dy = y + \ln |y-1| + C.$$

Получаем общее решение исходного уравнения:

$$x = \frac{1}{y^3}(y + \ln |y + 1| + C).$$

б) Найти частное решение дифференциального уравнения  $y' + xy = (x - 1)e^x y^2$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ .

РЕШЕНИЕ.

Это уравнение Бернулли. Решение ищем в виде  $y(x) = u \cdot v$ . Тогда  $y' = u'v + uv'$ . Подставим это выражение в уравнение:

$$u'v + uv' + xuv = (x - 1)e^x y^2.$$

Разобьем полученное уравнение на две части:

$$u'v + xuv = 0; \quad (4)$$

$$uv' = (x - 1)e^x u^2 v^2. \quad (5)$$

Найдем частное решение уравнения (4). Это уравнение в разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -xu \\ \int \frac{du}{u} &= - \int x dx \\ \ln |u| &= -\frac{x^2}{2} \\ u &= e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

Подставим найденную функцию в (5):

$$v' = (x - 1)e^x e^{-x^2/2} v^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= (x - 1)e^{x - \frac{x^2}{2}} v^2 \\ \int \frac{dv}{v^2} &= \int (x - 1)e^{x - \frac{x^2}{2}} dx \\ -\frac{1}{v^2} &= - \int e^{x - \frac{x^2}{2}} d\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = -e^{x - \frac{x^2}{2}} - C \end{aligned}$$

Отсюда

$$v^2 = \frac{1}{C + e^{x - \frac{x^2}{2}}}.$$

Получаем общий интеграл исходного уравнения

$$y^2 = \frac{e^{-x^2}}{C + e^{x - \frac{x^2}{2}}}.$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{C+1}.$$

Тогда  $C = 0$ .

Получаем решение задачи Коши:

$$y^2 = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-\frac{x^2}{2}}}.$$

Или

$$y^2 = e^{-x-\frac{x^2}{2}}.$$

Окончательно

$$y = e^{-\frac{2x+x^2}{4}}.$$

## ЗАДАНИЕ 2.

а) Найти общее решение уравнения:

$$y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2.$$

РЕШЕНИЕ.

Уравнение не содержит переменной  $y$ . Пусть  $p(x) = y'(x)$ . Тогда  $y''(x) = p'(x)$ . Подставим в уравнение:

$$p' \operatorname{ctg} x + p = 2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} &= 2 - p \\ \int \frac{dp}{p-2} &= - \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} \\ \ln |p-2| &= \int \frac{d \cos x}{\cos x} = \ln |\cos x| + \ln C_1 \\ p-2 &= C_1 \cos x \\ p &= C_1 \cos x + 2 \end{aligned}$$

Итак,

$$y'(x) = C_1 \cos x + 2.$$

Интегрируя это равенство, находим общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = C_1 \sin x + 2x + C_2.$$

б) Найти частное решение дифференциального уравнения  $y^3 y'' + 1 = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 0$ .

РЕШЕНИЕ.

Уравнение не содержит  $x$ . Пусть  $y' = p(y)$ . Тогда  $y'' = p'p$ . Подставим в уравнение:

$$y^3 p'p + 1 = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Получаем:

$$\begin{aligned} p \frac{dp}{dy} y^3 &= -1 \\ \int p dp &= - \int \frac{dy}{y^3} \\ \frac{p^2}{2} &= \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2} \\ p^2 &= \frac{1}{y^2} + C_1 \end{aligned}$$

Итак,

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1.$$

Используем начальные условия:

$$0^2 = \frac{1}{1} + C_1.$$

Тогда  $C_1 = -1$ . Получаем:

$$\begin{aligned} (y')^2 &= \frac{1}{y^2} - 1 \\ y' &= \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} \end{aligned}$$

Разделим переменные:

$$\begin{aligned} \int \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} - \int dx \\ -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 - y^2)}{\sqrt{1 - y^2}} = -\sqrt{1 - y^2} = x + C_2 \end{aligned}$$

Подставим начальные условия:

$$-\sqrt{1 - 1} = 1 + C_2.$$

Тогда  $C_2 = -1$ . Получаем:

$$\begin{aligned} -\sqrt{1 - y^2} &= -1 + x \\ \sqrt{1 - y^2} &= 1 - x \\ 1 - y^2 &= (1 - x)^2 \end{aligned}$$

Решение уравнения:

$$y = \sqrt{2x - x^2}.$$

ЗАДАНИЕ 3.

Найти частное решение дифференциального уравнения  $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ .

РЕШЕНИЕ.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 10\lambda + 34 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_{1,2} = -5 \pm 3i$ .

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{оо}} = e^{-5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$y_{\text{чн}} = ae^{-5x}.$$

Находим:

$$\begin{aligned} y'_{\text{чн}} &= -5ae^{-5x}; \\ y''_{\text{чн}} &= 25ae^{-5x}. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение:

$$25ae^{-5x} - 50ae^{-5x} + 34ae^{-5x} = -9e^{-5x}.$$

Или

$$9ae^{-5x} = -9e^{-5x}.$$

Отсюда  $a = -1$ .

Итак,

$$y_{\text{чн}} = -e^{-5x}.$$

Так как общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}},$$

то в нашем случае общее решение уравнения:

$$y = e^{-5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - e^{-5x}.$$

Дифференцируем это выражение:

$$\begin{aligned} y' &= -5e^{-5x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-5x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + 5e^{-5x} = \\ &= e^{-5x} ((-5C_1 + 3C_2) \cos 3x + (-3C_1 - 5C_2) \sin 3x + 5). \end{aligned}$$

Теперь подставим начальные условия:

$$\begin{aligned}C_1 - 1 &= 0; \\ -5C_1 + 3C_2 + 5 &= 6.\end{aligned}$$

Отсюда  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ . Окончательно, решение имеет вид:

$$y = e^{-5x} (\cos 3x + 2 \sin 3x - 1).$$

#### ЗАДАНИЕ 4.

Записать с неопределенными коэффициентами частные решения неоднородных дифференциальных уравнений (коэффициенты не находить):

а)  $4y'' + 4y' + y = (x + 2)e^{-x/2}$ .

РЕШЕНИЕ.

Характеристическое уравнение:

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \implies (2\lambda + 1)^2 = 0.$$

Корень  $\lambda = -\frac{1}{2}$  кратности 2.

Правой части уравнения также соответствует корень  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Поэтому частное решение уравнения имеет вид:

$$y_{\text{чн}} = x^2(ax + b)e^{-x/2}.$$

б)  $y'' + 4y' + 29y = e^{-2x}(x \cos 5x + x^2 \sin 5x)$ .

РЕШЕНИЕ.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0.$$

Его корни  $\lambda_{1,2} = -2 \pm 5i$ .

Правой части уравнения также соответствует эта пара корней. Получаем:

$$y_{\text{чн}} = xe^{-2x}((ax^2 + bx + c) \cos 5x + (fx^2 + gx + h) \sin 5x).$$

#### ЗАДАНИЕ 5.

Найти общее решение уравнения  $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin x}$ .

РЕШЕНИЕ.

Применим метод вариации постоянных.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Его корни  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ .

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) e^{-x} \cos x + C_2(x) e^{-x} \sin x.$$

Согласно методу, находим:

$$\begin{aligned}(e^{-x} \cos x)' &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x), \\ (e^{-x} \sin x)' &= -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)\end{aligned}$$

и составляем систему:

$$C_1' e^{-x} \cos x + C_2' e^{-x} \sin x = 0, \quad (6)$$

$$-C_1' e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_2' e^{-x}(\cos x - \sin x) = \frac{e^{-x}}{\sin x}. \quad (7)$$

Из (6) находим:

$$C_1' = -C_2' \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Подставим в (7):

$$C_2' \frac{\sin x}{\cos x} e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_2' e^{-x}(\cos x - \sin x) = \frac{e^{-x}}{\sin x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}C_2' \left( \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \cos x - \sin x \right) &= \frac{1}{\sin x} \\ C_2' &= \frac{\cos x}{\sin x}.\end{aligned}$$

Тогда

$$C_2(x) = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln |\sin x| + \widetilde{C}_2.$$

Теперь

$$C_1' = -1.$$

Тогда

$$C_1 = -x + \widetilde{C}_1.$$

Получаем общее решение уравнения:

$$y = (\widetilde{C}_1 - x) e^{-x} \cos x + (\ln |\sin x| + \widetilde{C}_2) e^{-x} \sin x.$$



### ЗАДАНИЕ 6.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'_t &= 9x + 6y \\ y'_t &= 2x + 8y \end{cases}$$

### РЕШЕНИЕ.

Из первого уравнения

$$y = \frac{1}{6}(x' - 9x) \quad (8)$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{6}(x'' - 9x')$$

Подставим эти выражения во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{6}(x'' - 9x') = 2x + \frac{8}{6}(x' - 9x).$$

Получаем уравнение:

$$x'' - 17x' + 60x = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 17\lambda + 60 = 0.$$

Его корни  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 12$ . Тогда

$$x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{12t}.$$

Находим:

$$x' = 5C_1 e^{5t} + 12C_2 e^{12t}.$$

Из (8) получаем

$$y = \frac{1}{6}(5C_1 e^{5t} + 12C_2 e^{12t} - 9C_1 e^{5t} - 9C_2 e^{12t}) = -\frac{2}{3}C_1 e^{5t} + \frac{1}{2}C_2 e^{12t}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x &= C_1 e^{5t} + C_2 e^{12t} \\ y &= -\frac{2}{3}C_1 e^{5t} + \frac{1}{2}C_2 e^{12t} \end{cases}$$

### РЯДЫ.

### ЗАДАНИЕ 7.

Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+3}{n+1} \right)^{2n}.$$

РЕШЕНИЕ.

Применим радикальный признак Коши:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{2n+3}{n+1} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+3}{n+1} \right)^2 = 4 > 1.$$

Значит, ряд расходится.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{(2n)!}.$$

РЕШЕНИЕ.

Применим признак Даламбера:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!5^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Значит, ряд сходится.

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{4+n^2-n}.$$

РЕШЕНИЕ.

Применим интегральный признак Коши:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{(2+x) dx}{x^2-x+4} &= \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+4} + \frac{5}{2(x^2-x+4)} \right) dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \int_1^b \frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2-x+4)}{x^2-x+4} + \int_1^b \frac{5 dx}{2 \left( (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} \right)} \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \ln(x^2-x+4) \Big|_1^b + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{15}} \Big|_1^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \ln(b^2-b+4) - \ln 2 + \sqrt{\frac{5}{3}} \operatorname{arctg} \frac{2b-1}{\sqrt{15}} - \sqrt{\frac{5}{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{15}} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится, следовательно, ряд тоже расходится.

ЗАДАНИЕ 8.

Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

РЕШЕНИЕ.

Так как при малых положительных  $x$   $\operatorname{tg} x > x$ , то  $\operatorname{tg} \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится (гармонический ряд). Поэтому, по признаку сравнения, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$  также расходится. Исходный ряд абсолютной сходимостью не обладает.

Применим признак Лейбница.

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} = 0$  — верно.

2)  $a_{n+1} \leq a_n$ .

Так как  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ , то  $\operatorname{tg} \frac{1}{n+1} \leq \operatorname{tg} \frac{1}{n}$  — верно.

Значит, ряд сходится. И, следовательно, он сходится условно.

ЗАДАНИЕ 9.

Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2} x^n}{(n+1)!}.$$

РЕШЕНИЕ.

Центр ряда  $x_0 = 0$ . Радиус сходимости:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{n/2} (n+2)!}{(n+1)! (n+1)^{(n+1)/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2} \sqrt{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} = \infty. \end{aligned}$$

Область сходимости ряда  $(-\infty; +\infty)$ .

ЗАДАНИЕ 10.

Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx.$$

РЕШЕНИЕ.

Используем разложение

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots, \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Возьмем  $t = -\frac{x^2}{2}$ . Тогда

$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{24 \cdot 16} + \dots$$

Это разложение имеет место при любых  $x$ .

Степенной ряд можно почленно интегрировать внутри области сходимости.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-x^2/2} dx = \int_0^1 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{24 \cdot 16} + \dots \right) dx = \\ &= \left( x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{7 \cdot 48} + \frac{x^9}{9 \cdot 384} + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{7 \cdot 48} + \frac{1}{9 \cdot 384} + \dots \end{aligned}$$

Остаток сходящегося знакочередующегося ряда по абсолютной величине не превосходит первого отброшенного члена. Так как  $\frac{1}{9 \cdot 384} = 0,00029 < 0,001$ , то с заданной точностью

$$I \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{7 \cdot 48} \approx 0,855.$$

ЗАДАНИЕ 11.

Найти первые  $k = 4$  отличных от нуля членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения  $y'' = e^y \sin y'$  при условиях  $y(\pi) = 1$ ,  $y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$ .

РЕШЕНИЕ.

Находим:

$$y''(\pi) = e^1 \sin \frac{\pi}{2} = e.$$

Дифференцируя уравнение, получим:

$$y'''(x) = e^y y' \sin y' + e^y y'' \cos y'.$$

Тогда

$$y'''(\pi) = e^1 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + e^1 e \cos \frac{\pi}{2} = \frac{e\pi}{2}.$$

Разложение в степенной ряд имеет вид:

$$y(x) = y(\pi) + y'(\pi)(x - \pi) + \frac{y''(\pi)}{2}(x - \pi)^2 + \frac{y'''(\pi)}{6}(x - \pi)^3 + \dots$$

Тогда

$$y(x) = 1 + \frac{\pi}{2}(x - \pi) + \frac{e}{2}(x - \pi)^2 + \frac{e\pi}{12}(x - \pi)^3 + \dots$$

ЗАДАНИЕ 12.

Разложить в ряд Фурье в интервале  $-3 < x < 3$  периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $\omega = 2l$ :  $l = 3$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -3 < x < 0 \\ -x, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

.

РЕШЕНИЕ.

Ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{3} + b_n \sin \frac{\pi n x}{3}.$$

Найдем коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{3} \left( \int_{-3}^0 3 dx + \int_0^3 -x dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 3x \Big|_{-3}^0 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 \right) = \frac{1}{3} \left( 9 - \frac{9}{2} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{3} \left( \int_{-3}^0 3 \cos \frac{\pi n x}{3} dx - \int_0^3 x \cos \frac{\pi n x}{3} dx \right) = \\ &\quad \left( \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx; \\ dv = \cos \frac{\pi n x}{3} dx; \quad v = \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3}. \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( 3 \cdot \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \Big|_{-3}^0 - \frac{3}{\pi n} x \sin \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 + \frac{3}{\pi n} \int_0^3 \sin \frac{\pi n x}{3} dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left( 0 - 0 - \frac{3}{\pi n} \cdot \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 \right) = -\frac{3}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - \cos 0) = \frac{3(1 - (-1)^n)}{\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{3} \left( \int_{-3}^0 3 \sin \frac{\pi n x}{3} dx - \int_0^3 x \sin \frac{\pi n x}{3} dx \right) = \\
&\quad \left( \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx; \\ dv = -\sin \frac{\pi n x}{3} dx; \quad v = \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3}. \end{array} \right) \\
&\quad \frac{1}{3} \left( -3 \cdot \frac{3}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_{-3}^0 + \frac{3}{\pi n} x \cos \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 - \frac{3}{\pi n} \int_0^3 \cos \frac{\pi n x}{3} dx \right) = \\
&= \frac{1}{3} \left( -\frac{9}{\pi n} + \frac{9}{\pi n} \cos \pi n + \frac{9}{\pi n} \cos \pi n - \frac{3}{\pi n} \cdot \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} \Big|_0^3 \right) = \\
&= -\frac{3}{\pi n} + \frac{6}{\pi n} (-1)^n = \frac{3(2(-1)^n - 1)}{\pi n}.
\end{aligned}$$

Получаем ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - (-1)^n)}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{3(2(-1)^n - 1)}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{3} = \\
&= \frac{3}{4} + \frac{6}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{3} - \frac{9}{\pi} \sin \frac{\pi x}{3} + \frac{3}{2\pi} \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{3\pi^2} \cos \pi x - \frac{3}{\pi} \sin \pi x + \dots
\end{aligned}$$