

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации  
Тульский государственный университет

Кафедра математического анализа

РУДКЕВИЧ Е.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ  
ПО МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения, 4 семестр

Тула 2006

# КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

## ЗАДАНИЕ 1.

Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x-y) dx dy$  по области  $D$ , ограниченной линиями  $y = x^2 - 1$ ,  $y = 3$ .

## РЕШЕНИЕ.

Найдем координаты точек пересечения линий, решив систему

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Тогда абсциссы точек пересечения  $x = \pm 2$ .

Получаем:

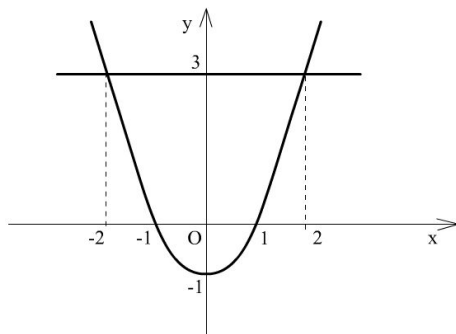


Рис.1

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{-2}^2 dx \int_{x^2-1}^3 (x-y) dy = \\ &= \int_{-2}^2 \left( xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2-1}^3 dx = \\ &= \int_{-2}^2 \left( 3x - \frac{9}{2} - x(x^2 - 1) + \frac{1}{2}(x^2 - 1)^2 \right) dx = \\ &= \left( \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x \right) \Big|_{-2}^2 = -\frac{224}{15}. \end{aligned}$$

## ЗАДАНИЕ 2.

С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ,  $\frac{3}{2}z = x^2 + y^2$ .

## РЕШЕНИЕ.

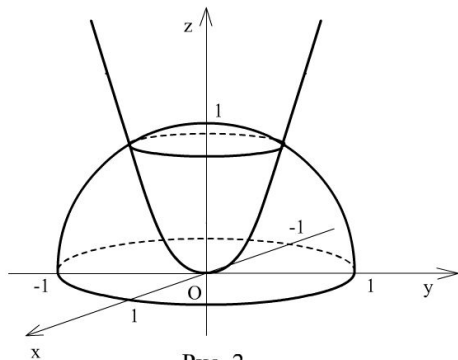


Рис. 2

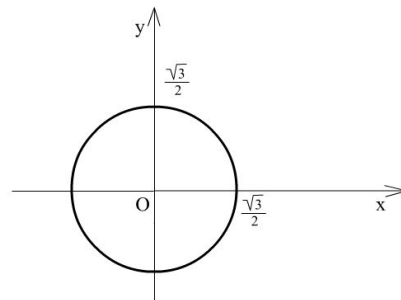


Рис. 3

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  — полусфера,  $\frac{3}{2}z = x^2 + y^2$  — параболоид вращения (рис. 2).  
Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тогда уравнения поверхностей перепишутся в виде  $z = \sqrt{1-r^2}$  и  $z = \frac{2}{3}r^2$ . Проекцию линии пересечения поверхностей на плоскость  $Oxy$  найдем, исключая  $z$  из системы

$$\begin{cases} z = \sqrt{1-r^2} \\ z = \frac{2}{3}r^2 \end{cases}$$

Тогда  $\sqrt{1-r^2} = \frac{2}{3}r^2$ , откуда  $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$  — это уравнение окружности (рис. 3).  
Объем тела равен

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\sqrt{3}/2} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{2}{3}r^2}^{\sqrt{1-r^2}} dz = \int_0^{\sqrt{3}/2} r dr \int_0^{2\pi} \left( \sqrt{1-r^2} - \frac{2}{3}r^2 \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{\sqrt{3}/2} 2\pi r \left( \sqrt{1-r^2} - \frac{2}{3}r^2 \right) dr = \int_0^{\sqrt{3}/2} \pi \sqrt{1-r^2} dr^2 - \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4\pi}{3} r^3 dr = \\ &= \pi \left( -\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \pi \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{3} - \frac{3}{16} \right) = \frac{19}{48}\pi. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 3.

Вычислить криволинейный интеграл первого рода  $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$ , где  $L$  — дуга кардиоиды  $\rho = (1 + \cos \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

РЕШЕНИЕ.

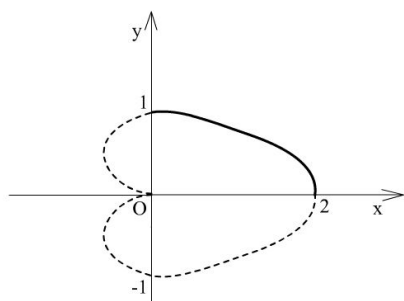


Рис. 4

Найдем дифференциал дуги в полярных координатах по формуле  $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$ .  
Так как  $\rho' = -\sin \varphi$ , то

$$\begin{aligned} \rho^2 + (\rho')^2 &= (1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 1 + 2 \cos \varphi + 1 = \\ &= 2(1 + \cos \varphi) = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Тогда  $dl = 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$  (при  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$ ). Получаем:

$$I = \int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl = \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg} \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \int_0^{\pi/2} 2\varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Интегрируем по частям. Возьмем  $u = \varphi$ ,  $dv = \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$ . Тогда  $du = d\varphi$ ,  $v = 2 \sin \frac{\varphi}{2}$ .  
Получаем:

$$I = 2 \left( 2 \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right) = 2 \left( 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cos \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 8.$$

ЗАДАНИЕ 4.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода  $\int_L (xy - y^2) dx + x dy$ , где  $L$  — отрезок прямой от точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(1, 2)$ .

РЕШЕНИЕ.

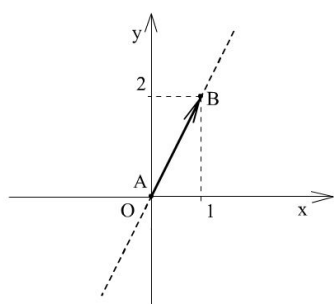


Рис. 5

Уравнение прямой  $AB$ :  $y = 2x$ . Тогда  $dy = 2dx$ .  
Параметр  $x$  при перемещении от точки  $A$  к точке  $B$  изменяется от 0 до 1 (рис. 5). Получаем:

$$\begin{aligned} \int_L (xy - y^2) dx + x dy &= \int_0^1 (x \cdot 2x - (2x)^2 + x \cdot 2) dx = \\ &= \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \left( -\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 5.

Вычислить поверхностный интеграл первого рода  $\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} d\sigma$ , где  $S$  — конечная часть поверхности  $y = 2 - x^2 - z^2$ , отсеченная плоскостью  $y = 0$ .

РЕШЕНИЕ.

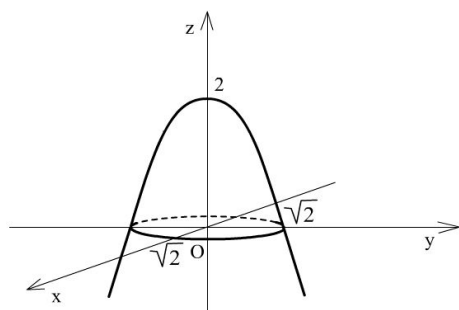


Рис. 6

Проекция параболоида на плоскость  $Oxz$  — это круг  $x^2 + z^2 \leq 2$ . найдем дифференциал площади поверхности  $d\sigma$  по формуле:

$$d\sigma = \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz.$$

Так как  $y'_x = -2x$ ,  $y'_z = -2z$ , то

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} dx dz.$$

Получаем:

$$I = \iint_S \sqrt{1+4x^2+4z^2} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+4x^2+4z^2} \cdot \sqrt{1+4x^2+4z^2} dx dz =$$

$$= \iint_{D_{xz}} (1+4x^2+4z^2) dx dz.$$

Переходя к полярным координатам по формулам  $x = r \cos \varphi$ ,  $z = r \sin \varphi$ ,  $dx dz = r dr d\varphi$ , получаем:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (1+4r^2)r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (r+4r^3) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi (1+4r^2)r \Big|_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} 5 d\varphi = 10\pi.$$

ЗАДАНИЕ 6.

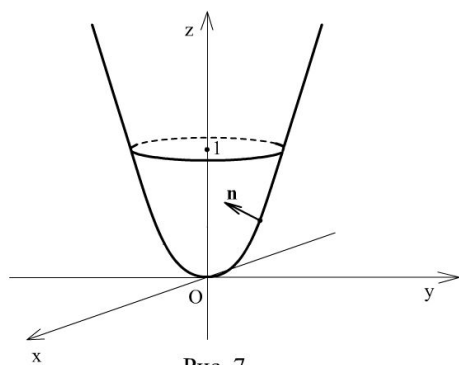


Рис. 7

Вычислить поверхностный интеграл второго рода  $\iint_S x^2 dy dz + 2y^2 dx dz - z dx dy$ , где  $S$  — часть поверхности параболоида  $z = x^2 + y^2$  (нормальный вектор  $\mathbf{n}$  которой образует острый угол с ортом  $\mathbf{k}$ ), отсекаемая плоскостью  $z = 1$ .

РЕШЕНИЕ.

Разобьем данный интеграл в сумму трех интегралов:

$$I = \iint_S x^2 dy dz + 2y^2 dx dz - z dx dy = \iint_S x^2 dy dz + \iint_S 2y^2 dx dz - \iint_S z dx dy = I_1 + I_2 + I_3.$$

При вычислении первого интеграла разобьем поверхность на две части — переднюю ( $x = \sqrt{z - y^2}$ ) и заднюю ( $x = -\sqrt{z - y^2}$ ). Для передней части нормальный вектор образует тупой угол с осью  $Ox$ , а для задней — острый. Проекции обеих частей поверхности на плоскость  $Oyz$  одинаковы. Получаем:

$$I_1 = \iint_S x^2 dy dz = - \iint_{D_{yz}} (z - y^2) dy dz + \iint_{D_{yz}} (z - y^2) dy dz = 0.$$

Аналогично, при вычислении второго интеграла, поверхность разобьем на две части — правую ( $y = \sqrt{z - x^2}$ , нормальный вектор образует тупой угол с осью  $Oy$ ) и левую ( $y = -\sqrt{z - x^2}$ , нормальный вектор образует острый угол с осью  $Oy$ ). Тогда

$$I_2 = \iint_S 2y^2 dx dz = - \iint_{D_{xz}} 2(z - x^2) dx dz + \iint_{D_{xz}} 2(z - x^2) dx dz = 0.$$

проекция поверхности на плоскость  $Oxy$  — круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Тогда

$$I_3 = - \iint_S z \, dx dy = - \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) \, dx dy = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 \, dr = - \varphi \Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

Получаем:

$$I = -\frac{\pi}{2}.$$

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.

### ЗАДАНИЕ 7.

В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем или убывающем порядке.

РЕШЕНИЕ.

Число всех возможных исходов равно числу перестановок из 6 кубиков, т.е.  $n = 6! = 720$ .

Благоприятных исходов два ( $m = 2$ ). Поэтому, согласно классическому определению, искомая вероятность равна

$$P = \frac{m}{n} = \frac{2}{720} = \frac{1}{360} = 0,00278.$$

### ЗАДАНИЕ 8.

Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

РЕШЕНИЕ.

Рассмотрим события  $A_i = \{i\text{-я бомба попала в мост.}\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . По условию  $P(A_1) = 0,3$ ,  $P(A_2) = 0,4$ ,  $P(A_3) = 0,6$ ,  $P(A_4) = 0,7$ .

Событие  $A = \{\text{мост будет разрушен}\}$ . Противоположное событие  $\bar{A}$  означает, что ни одна бомба не попала в мост, т.е.  $\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$ . Так как события  $\bar{A}_i$  можно считать независимыми, то по формуле умножения вероятностей получаем:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3))(1 - P(A_4)) = \\ &= (1 - 0,3)(1 - 0,4)(1 - 0,6)(1 - 0,7) = 0,0504. \end{aligned}$$

Тогда искомая вероятность равна

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,0504 = 0,9496.$$

### ЗАДАНИЕ 9.

При передаче сообщений "точка" и "тире" эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 0,4 сообщений "точка" и 1/3 сообщений "тире". Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

РЕШЕНИЕ.

Пусть событие  $A = \{ \text{принятый сигнал не искажен} \}$ .

Рассмотрим события:

$H_1 = \{ \text{передан сигнал "точка"} \}$ ;

$H_2 = \{ \text{передан сигнал "тире"} \}$ .

События  $H_1$  и  $H_2$  образуют полную группу попарно несовместных событий.  $P(H_1) = \frac{5}{8}$ ,  $P(H_2) = \frac{3}{8}$ . Условные вероятности:  $P(A|H_1) = 0,6$ ,  $P(A|H_2) = \frac{2}{3}$ . По формуле полной вероятности находим:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{5}{8} \cdot 0,6 + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 0,625.$$

ЗАДАНИЕ 10.

Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий: 1) окажется два бракованных изделия; 2) окажется не менее 3 бракованных изделий.

РЕШЕНИЕ.

Здесь имеется схема повторных независимых испытаний:

$$n = 5; \quad p = 0,05; \quad q = 1 - p = 0,95.$$

Используем формулу Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$$1) P_5(2) = C_5^2 0,05^2 0,95^3 = 0,2143.$$

2)  $A \{ \text{среди 5 изделий не менее 3 бракованных} \}$ . Это означает, что бракованных изделий может быть 3, 4 или 5.

$$P(A) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 0,05^3 0,95^2 + C_5^4 0,05^4 0,95^1 + C_5^5 0,05^5 0,95^0 = 0,001158.$$

ЗАДАНИЕ 11.

Непрерывная случайная величина  $X$  подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -\pi \\ A \cos^2 \frac{x}{2}, & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

Требуется найти значение параметра  $A$ , функцию распределения  $F(x)$ , математическое ожидание  $M(X)$ , дисперсию  $D(X)$  и среднее квадратичное отклонение  $\sigma(X)$ , вероятность попадания СВ  $X$  в интервал  $(-\frac{\pi}{2}; 0)$ .

РЕШЕНИЕ.

Свойство плотности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Находим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-\pi} 0 dx + \int_{-\pi}^0 A \cos^2 \frac{x}{2} dx + \int_0^{+\infty} 0 dx = \\ &= \frac{A}{2} \int_{-\pi}^0 (1 + \cos x) dx = \frac{A}{2} (x + \sin x) \Big|_{-\pi}^0 = \frac{A\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

Отсюда  $A = \frac{2}{\pi}$ .

Итак,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -\pi; \\ \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{x}{2}, & \text{при } -\pi < x < 0; \\ 0, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Функцию распределения находим по формуле:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Если  $x \leq -\pi$ , то  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0$ .

Если  $-\pi < x \leq 0$ , то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi} 0 dx + \int_{-\pi}^x \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^x (1 + \cos x) dx = \frac{1}{\pi} (x + \sin x) \Big|_{-\pi}^x = \frac{1}{\pi} (x + \sin x + \pi).$$

Если  $x > 0$ , то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi} 0 dx + \int_{-\pi}^0 \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx + \int_0^x 0 dx = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -\pi; \\ \frac{1}{\pi} (x + \pi + \sin x), & \text{при } -\pi < x \leq 0; \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$



Графики функций на рис. 8 и 9.

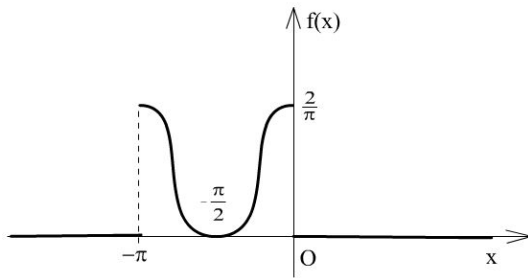


Рис. 8

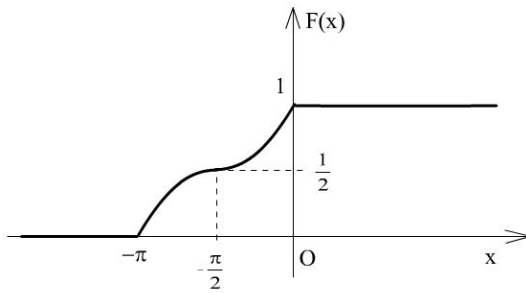


Рис. 9

Математическое ожидание:

$$\begin{aligned}
 M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\pi}^0 \frac{2}{\pi} x \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\pi} x (1 + \cos x) dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 + x \sin x \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \sin x dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi^2}{2} + \cos x \Big|_{-\pi}^0 \right) = -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \approx -0,9342.
 \end{aligned}$$

Дисперсия:

$$\begin{aligned}
 D(X) &= M(X^2) - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2 = \\
 &= \int_{-\pi}^0 \frac{2}{\pi} x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx - \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \right)^2 = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\pi} x^2 (1 + \cos x) dx - \left( -\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \right)^2 = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^0 + x^2 \sin x \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 2x \sin x dx \right) - \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi^2}{4} + 2 = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{3} + 2x \cos x \Big|_{-\pi}^0 - 2 \int_{-\pi}^0 \cos x dx \right) - \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi^2}{4} + 2 = \\
 &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{\pi} \cdot \pi - \frac{2}{\pi} \sin x \Big|_{-\pi}^0 - \frac{4}{\pi^2} - \frac{\pi^2}{4} + 2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{4}{\pi^2} \approx 0,4172.
 \end{aligned}$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,4172} = 0,6459.$$

Вероятность:

$$\begin{aligned}
 P(X \in (-\frac{\pi}{2}; 0)) &= \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx = \int_{-\pi/2}^0 \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{x}{2} dx = \\
 &= \int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{\pi} (1 + \cos x) dx = \frac{1}{\pi} (x + \sin x) \Big|_{-\pi/2}^0 = -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \approx 0,8183.
 \end{aligned}$$

## ЗАДАНИЕ 12.

Приводятся результаты измерения некоторой физической величины, которые рассматриваются как  $n$  реализаций случайной величины  $X$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$x_i$	21.4	22.8	28.1	29.4	28	24.4	23.7	23.6	23.8	22.4	31.9	23.4	23.2	19.3

Считая, что СВ  $X$  имеет нормальное распределение, необходимо:

- 1) Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения СВ  $X$ ;
- 2) Записать плотность вероятности и функцию распределения СВ  $X$ ;
- 3) Найти вероятность  $P(23 < X < 25)$ , используя функцию Лапласа;
- 4) Найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание СВ  $X$  с заданной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ , считая дисперсию известной и равной  $s^2$ ;
- 5) Найти доверительный интервал, накрывающий математическое ожидание СВ  $X$  с заданной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ , считая дисперсию неизвестной;
- 6) Найти доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратического отклонения с заданной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha = 0,95$ ;
- 7) Найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью  $P = 1 - \alpha = 0,95$  можно было утверждать, что выборочное среднее  $\bar{X}$  оценивает математическое ожидание  $MX$  с погрешностью, не превышающей  $\varepsilon = \sigma/4$  (считать дисперсию известной и равной  $\sigma^2 = s^2$ )

## РЕШЕНИЕ.

- 1) В качестве оценки математического ожидания возьмем выборочное среднее:

$$\hat{a} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{14} (21,4 + 22,8 + \dots) = 24,671.$$

Выборочная дисперсия:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{14} (21,4^2 + 22,8^2 + \dots) - 24,671^2 = 10,8835.$$

Исправленная дисперсия:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma^2 = \frac{14}{13} \cdot 10,8835 = 11,7207.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\hat{\sigma} = s = \sqrt{s^2} = 3,4235.$$

2) Плотность вероятности нормального распределения с параметрами  $a$  и  $\sigma$  имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

В данном случае

$$f(x) = \frac{1}{3,4235\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-24,671)^2}{23,4413}}.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx - \text{функция Лапласа.}$$

В данном случае

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-24,671}{3,4235}\right).$$

3) Для нормального распределения

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(23 < X < 25) &= \Phi\left(\frac{25-24,671}{3,4235}\right) - \Phi\left(\frac{23-24,671}{3,4235}\right) = \\ &= \Phi(0,096) - \Phi(-0,488) = \Phi(0,096) + \Phi(0,488). \end{aligned}$$

Из таблиц для функции Лапласа находим

$$\begin{aligned} \Phi(0,096) &= 0,0382; \\ \Phi(0,488) &= 0,1872. \end{aligned}$$

Тогда

$$P(23 < X < 25) = 0,0382 + 0,1872 = 0,2254.$$

4) В случае известной дисперсии  $\sigma^2$  доверительный интервал для математического ожидания имеет вид:

$$\bar{x} - u_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + u_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

По доверительной вероятности  $\gamma = 0,95$  из таблицы находим квантиль нормального распределения  $u_\gamma = 1,96$ . Тогда

$$24,671 - 1,96 \frac{3,4235}{\sqrt{14}} < a < 24,671 + 1,96 \frac{3,4235}{\sqrt{14}}.$$

Или

$$22,878 < a < 26,465.$$

5) В случае неизвестной дисперсии  $\sigma^2$  доверительный интервал для математического ожидания примет вид:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$t_\gamma$  — квантиль распределения Стьюдента с  $n - 1 = 13$  степенями свободы. Из таблицы находим  $t_\gamma = 2,16$ . Тогда

$$24,671 - 2,16 \frac{3,4235}{\sqrt{14}} < a < 24,671 + 2,16 \frac{3,4235}{\sqrt{14}}.$$

Или

$$22,695 < a < 26,648.$$

6) Доверительный интервал для дисперсии  $\sigma^2$  нормально распределенной случайной величины имеет вид:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{(1)}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{(2)}^2}.$$

$\chi_{(1)}^2$  и  $\chi_{(2)}^2$  — квантили  $\chi^2$ -распределения с  $n - 1 = 13$  степенями свободы и  $\alpha_1 = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$  и  $\alpha_2 = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1,95}{2} = 0,975$ . В данном случае из таблицы находим:

$$\begin{aligned}\chi_{(1)}^2 &= 24,7; \\ \chi_{(2)}^2 &= 5,01.\end{aligned}$$

Получаем:

$$\frac{13 \cdot 11,7207}{24,7} < \sigma^2 < \frac{13 \cdot 11,7207}{5,01}$$

или

$$6,1687 < \sigma^2 < 30,4129.$$

Тогда доверительный интервал для среднего квадратического отклонения имеет вид:

$$2,4837 < \sigma < 5,5148.$$

7) Погрешность оценки математического ожидания  $\varepsilon = u_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  Так как при  $\gamma = 0,95$   $u_\gamma = 1,96$ , то

$$1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \frac{\sigma}{4}.$$

Отсюда  $\sqrt{n} > 1,96 \cdot 4$  или  $n > 61,47$ . Значит, минимальный объем выборки равен  $n = 62$ .