

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации  
Тульский государственный университет

Кафедра математического анализа

РУДКЕВИЧ Е.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ  
ПО МАТЕМАТИКЕ

для студентов заочного отделения, 2 семестр

Тула 2006

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## ЗАДАНИЕ 1.

Провести полное исследование двух функций и построить их графики.

а)  $y = \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2$ .

РЕШЕНИЕ.

Область определения функции  $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Так как область определения несимметрична относительно начала координат, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция непериодическая.

Функция принимает только неотрицательные значения.

Точки пересечения с осями:

С  $Ox$ :  $y = 0$  при  $x = 3$ ;

С  $Oy$ :  $y(0) = 9$ .

$x = 1$  — точка разрыва.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 = +\infty;$$
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 = +\infty.$$

Прямая  $x = 1$  — вертикальная асимптота.

Определим наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{9}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right)^2 = 1.$$

Прямая  $y = 1$  — горизонтальная асимптота при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ .

$$y' = 2 \frac{x-3}{x-1} \cdot \frac{x-1-(x-3)}{(x-1)^2} = 2 \frac{2(x-3)}{(x-1)^3} = 4 \frac{x-3}{(x-1)^3}.$$

$y' = 0$  при  $x = 3$ .

$y'$  не определена при  $x = 1$ .

Знаки  $y'$ :

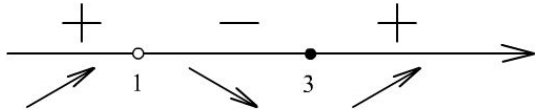


Рис. 1

Функция возрастает на интервалах  $(-\infty; 1)$  и  $(3; +\infty)$ . Функция убывает на интервале  $(1; 3)$ .

$x = 3$  — точка минимума.  $y(3) = 0$ .

$$y'' = 4 \cdot \frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^6} = 4 \frac{x-1-3x+9}{(x-1)^4} = 4 \frac{8-2x}{(x-1)^4} = 8 \frac{4-x}{(x-1)^4}.$$

$y'' = 0$  при  $x = 4$ .

$y''$  не определена при  $x = 1$ .

Знаки  $y''$ :

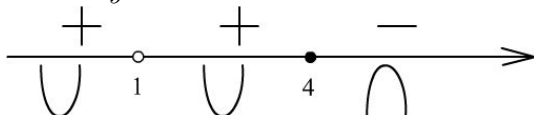


Рис. 2

Функция выпукла вниз на интервалах  $(-\infty; 1)$  и  $(1; 4)$ . Функция выпукла вверх на интервале  $(4; +\infty)$ .

$x = 4$  — точка перегиба.  $y(4) = \frac{1}{9}$ ;  $y'(4) = \frac{4}{27}$ .

График приведен на рис. 3.

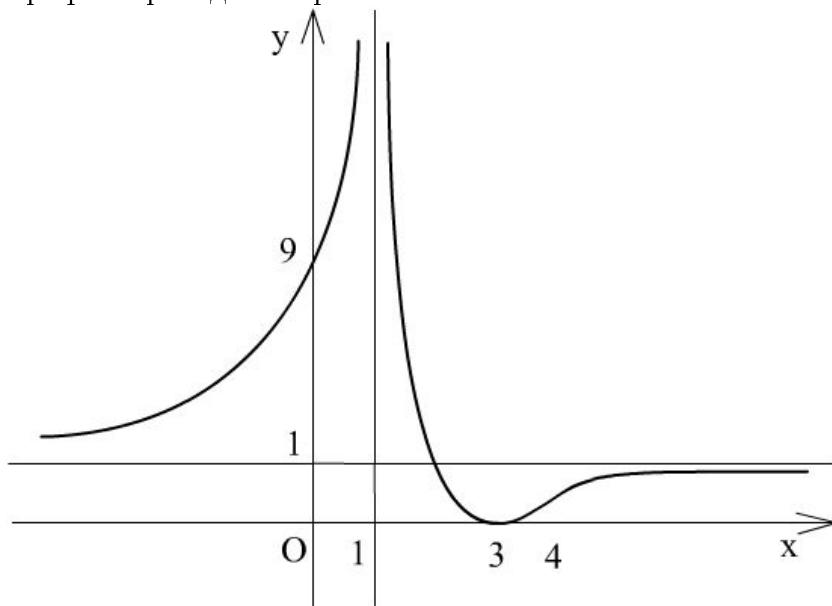


Рис.3

б)  $y = x - \ln(1 + x^2)$ .

РЕШЕНИЕ.

Область определения функции  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .

$$y(-x) = -x - \ln(1 + (-x)^2) = -x - \ln(1 + x^2)$$

$y(-x) \neq y(x)$ ,  $y(-x) \neq -y(x)$ . Функция не является ни четной, ни нечетной.

Функция неперiodическая.

Точки пересечения с осями:

С  $Ox$ :  $y = 0$ , т.е.  $x - \ln(1 + x^2) = 0$ . Единственное решение этого уравнения  $x = 0$ .

Значит, график функции проходит через начало координат, и в других точках оси координат не пересекает.

Так как функция непрерывна на всей числовой оси, то ее график вертикальных асимптот не имеет.

Определим наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\ln(1 + x^2)}{x} \right).$$

Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(1 + x^2) \cdot 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0$$

Значит,  $k = 1$ .

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln(1 + x^2) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\ln(1 + x^2)) = \infty.$$

График функции наклонных асимптот не имеет.

$$y' = 1 - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{1 + x^2 - 2x}{1 + x^2} = \frac{(x - 1)^2}{1 + x^2}.$$

$y' = 0$  при  $x = 1$ .

Производная определена во всех точках области определения.

Знаки  $y'$ :

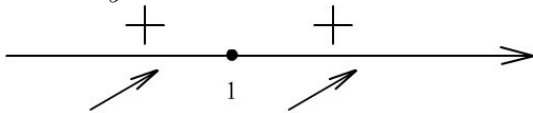


Рис. 4

Функция возрастает на всей области определения. Экстремумов не имеет.

$$y'' = -2 \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = -2 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

$y'' = 0$  при  $x = 1$  и  $x = -1$ .

$y''$  определена во всех точках области определения.

Знаки  $y''$ :

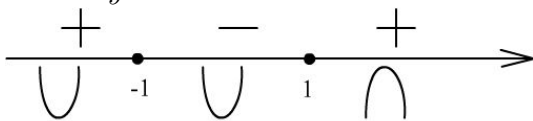


Рис. 5

Функция выпукла вниз на интервалах  $(-\infty; -1)$  и  $(1; +\infty)$ . Функция выпукла вверх на интервале  $(-1; 1)$ .

$x = -1$  и  $x = 1$  — точки перегиба.

$$y(-1) = -1 - \ln 2 \approx -1,69; \quad y'(-1) = 1.$$

$$y(1) = 1 - \ln 2 \approx 0,31; \quad y'(1) = 0.$$

График приведен на рис. 6.

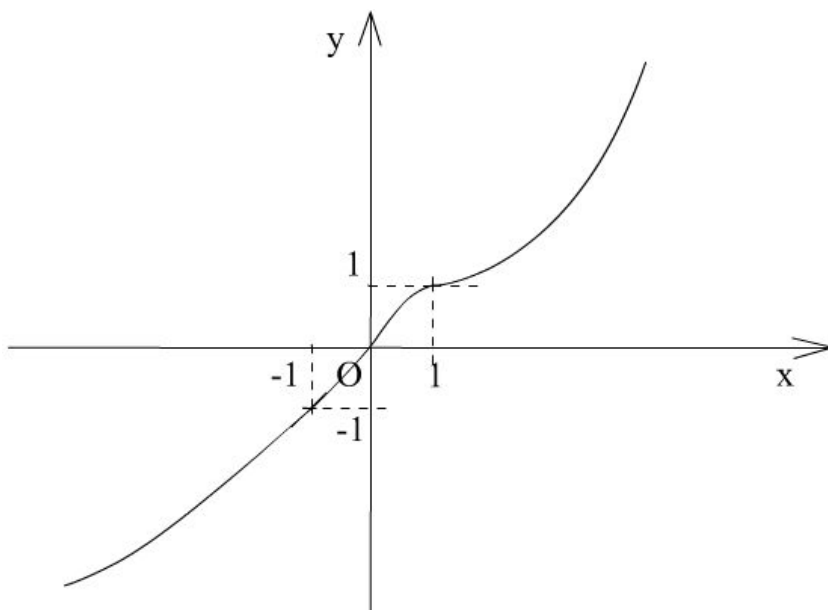


Рис.6

## ЗАДАНИЕ 2.

На странице книги печатный текст должен занимать  $S$  квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по  $a$  см, правое и левое — по  $b$  см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

## РЕШЕНИЕ.

Пусть размеры печатного текста  $x$  и  $y$  см (рис.7). Тогда его площадь  $S = xy$ . Отсюда  $y = \frac{S}{x}$ . Площадь страницы

$$T = (x + 2b)(y + 2a)$$

или

$$T(x) = (x + 2b)\left(\frac{S}{x} + 2a\right) = S + \frac{2bS}{x} + 2ax + 2ab.$$

Исследуем эту функцию на экстремум. Найдем производную:

$$T'(x) = -\frac{2bS}{x^2} + 2a.$$

$T'(x) = 0$  при  $x = \sqrt{\frac{bS}{a}}$  (учитывая, что  $x > 0$ ). Убедимся, что в этой точке достигается минимум функции  $T$ . Для этого найдем вторую производную:

$$T''(x) = \frac{4bS}{x^3}.$$

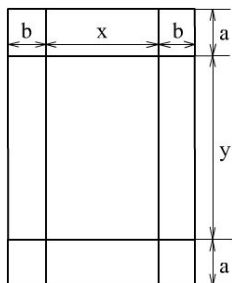


Рис. 7.

Тогда

$$T''\left(\sqrt{\frac{bS}{a}}\right) = \frac{4bSa\sqrt{a}}{bS\sqrt{bS}} = 4\sqrt{\frac{a}{bS}} > 0.$$

Значит, в этой точке действительно достигается минимум функции  $T(x)$ .

Размеры бумаги: ширина  $\sqrt{\frac{bS}{a}} + 2b$  см, высота  $\sqrt{\frac{Sa}{b}} + 2a$  см.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

ЗАДАНИЕ 3.

Найти полный дифференциал  $dz$  данной функции

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

РЕШЕНИЕ. Полный дифференциал функции двух переменных имеет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Значит,

$$dz = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

ЗАДАНИЕ 4.

Показать, что функция  $z = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

РЕШЕНИЕ.

Последовательно находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(y-x)}}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{y\sqrt{y-x}}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{(y-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{x(y-x)^3}}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{2y} \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sqrt{y-x} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x} = \frac{y-x+x}{4y\sqrt{x(y-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{x(y-x)^3}}.\end{aligned}$$

Видим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

А это и означает, что функция удовлетворяет заданному уравнению.

ЗАДАНИЕ 5.

а) Найти указанные производные данной сложной функции.

$$z = \cos^2(x - 2y), \text{ где } x = e^{u/v}, \quad y = \ln(uv). \quad \frac{\partial z}{\partial u} = ?, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$$

РЕШЕНИЕ.

Производные сложной функции найдем по формулам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.\end{aligned}$$

Находим все частные производные, входящие в эти равенства.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 2 \cos(x - 2y) \cdot (-\sin(x - 2y)) = -\sin(2x - 4y); \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2 \cos(x - 2y) \cdot (-\sin(x - 2y))(-2) = 2 \sin(2x - 4y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= e^{u/v} \frac{1}{v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = e^{u/v} \left(-\frac{u}{v^2}\right); \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{u}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{v}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= -\sin(2x - 4y) e^{u/v} \frac{1}{v} + 2 \sin(2x - 4y) \frac{1}{u} = \sin(2e^{u/v} - 4 \ln(uv)) \left(-\frac{1}{v} e^{u/v} + \frac{2}{u}\right); \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -\sin(2x - 4y) e^{u/v} \left(-\frac{u}{v^2}\right) + 2 \sin(2x - 4y) \frac{1}{v} = \sin(2e^{u/v} - 4 \ln(uv)) \left(\frac{u}{v^2} e^{u/v} + \frac{2}{v}\right).\end{aligned}$$

б) Найти  $\frac{dy}{dx}$  от функции  $y = f(x)$ , заданной уравнением  $\operatorname{arctg} \frac{x+y}{2} - \frac{y}{2x} = 0$ .

РЕШЕНИЕ.

Производную от неявной функции двух переменных, заданной уравнением  $F(x, y) = 0$ , находим по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

В данном случае находим:

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{y}{2x^2} = \frac{2}{4 + (x+y)^2} + \frac{y}{2x^2} = \frac{4x^2 + y(4 + x^2 + y^2 + 2xy)}{2x^2(4 + (x+y)^2)} = \\ &= \frac{4x^2 + 4y + x^2y + y^3 + 2xy^2}{2x^2(4 + (x+y)^2)}; \\ F'_y &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{2}{4 + (x+y)^2} - \frac{1}{2x} = \frac{4x - 4 - x^2 - y^2 - 2xy}{2x(4 + (x+y)^2)}; \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x^2 + 4y + x^2y + y^3 + 2xy^2}{2x^2(4 + (x+y)^2)} \cdot \frac{2x(4 + (x+y)^2)}{4x - 4 - x^2 - y^2 - 2xy} = \frac{4x^2 + 4y + x^2y + y^3 + 2xy^2}{x(-4x + 4 + x^2 + y^2 + 2xy)}.$$

ЗАДАНИЕ 6.

Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2y^3(6 - x - y)$  ( $x > 0$ ;  $y > 0$ ).

РЕШЕНИЕ.

Определим стационарные точки, решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy^3(6 - x - y) - x^2y^3 = xy^3(12 - 3x - 2y); \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 3y^2x^2(6 - x - y) - x^2y^3 = x^2y^2(18 - 3x - 4y). \end{aligned}$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} xy^3(12 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2y^2(18 - 3x - 4y) = 0 \end{cases}$$

Так как по условию  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то единственным решением этой системы является  $x = 2$ ,  $y = 3$ .



Итак,  $M(2, 3)$  — стационарная точка.

Находим вторые производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y^3(12 - 3x - 2y) - 3xy^3 = y^3(12 - 6x - 2y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2x^2y(18 - 3x - 4y) - 4x^2y^2 = 2x^2y(18 - 3x - 6y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 3xy^2(12 - 3x - 2y) - 2xy^3 = xy^2(36 - 9x - 8y).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}A &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_M = -162; \\ C &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_M = -144; \\ B &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_M = -108.\end{aligned}$$

Вычисляем  $\Delta = AC - B^2 = 11664$ . Так как  $\Delta > 0$ , то  $M$  — точка экстремума функции  $f$ . Так как  $A < 0$ , то это точка максимума.

Итак,  $M(2, 3)$  — точка максимума функции  $f(x, y)$ ,  $z_{max} = 108$ .

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

### ЗАДАНИЕ 7.

Найти неопределенные интегралы. Результат проверить дифференцированием.

$$\text{а) } \int x^3 \sqrt[5]{7 - 2x^4} dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned}\int x^3 \sqrt[5]{7 - 2x^4} dx &= -\frac{1}{8} \int (7 - 2x^4)^{1/5} (-8x^3) dx = -\frac{1}{8} \int (7 - 2x^4)^{1/5} d(7 - 2x^4) = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6/5} (7 - 2x^4)^{6/5} + C = -\frac{5}{48} \sqrt[5]{(7 - 2x^4)^6} + C.\end{aligned}$$

Проверка:

$$\left( -\frac{5}{48} \sqrt[5]{(7 - 2x^4)^6} + C \right)' = -\frac{5}{48} \cdot \frac{6}{5} (7 - 2x^4)^{1/5} (-8x^3) = x^3 \sqrt[5]{7 - 2x^4}.$$

Верно.

$$\text{б) } \int \sin^3 5x dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 5x \, dx &= \int \sin^2 5x \cdot \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \int (1 - \cos^2 5x) \, d \cos 5x = \\ &= -\frac{1}{5} \left( \cos 5x - \frac{1}{3} \cos^3 5x \right) + C = -\frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{15} \cos^3 5x + C.\end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}\left( -\frac{1}{5} \cos 5x + \frac{1}{15} \cos^3 5x + C \right)' &= -\frac{1}{5} \cdot 5(-\sin 5x) + \frac{1}{15} \cdot 3 \cos^2 5x (-\sin 5x) \cdot 5 = \\ &= \sin 5x - \sin 5x \cdot \cos^2 5x = \sin 5x (1 - \cos^2 5x) = \sin^3 5x.\end{aligned}$$

Верно.

ЗАДАНИЕ 8.

Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int \frac{-2x^3 + 11x^2 - 6x - 14}{(x^2 + 4)(x - 3)^2} \, dx.$$

РЕШЕНИЕ.

Дробь правильная. Разложим ее в сумму простейших дробей.

$$\frac{-2x^3 + 11x^2 - 6x - 14}{(x^2 + 4)(x - 3)^2} = \frac{ax + b}{x^2 + 4} + \frac{c}{x - 3} + \frac{d}{(x - 3)^2}. \quad (1)$$

Приведем дроби в правой части равенства (1) к общему знаменателю. Тогда общий знаменатель  $(x^2 + 4)(x - 3)^2$  совпадает со знаменателем дроби в левой части (1). Приравнявая числители, находим

$$-2x^3 + 11x^2 - 6x - 14 = (ax + b)(x - 3)^2 + c(x - 3)(x^2 + 4) + d(x^2 + 4).$$

Раскрываем скобки и собираем слагаемые с одинаковыми степенями  $x$ :

$$\begin{aligned}(ax + b)(x - 3)^2 + c(x - 3)(x^2 + 4) + d(x^2 + 4) &= (ax + b)(x^2 - 6x + 9) + c(x - 3)(x^2 + 4) + dx^2 + 4d = \\ &= ax^3 + bx^2 - 6ax^2 - 6bx + 9ax + 9b + cx^3 - 3cx^2 + 4cx - 12c + dx^2 + 4d = \\ &= (a + c)x^3 + (-6a + b - 3c + d)x^2 + (9a - 6b + 4c)x + (9b - 12c + 4d) = -2x^3 + 11x^2 - 6x - 14.\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем систему:

$$\begin{aligned}a + c &= -2 \\ -6a + b - 3c + d &= 11 \\ 9a - 6b + 4c &= -6 \\ 9b - 12c + 4d &= -14\end{aligned}$$

Решая эту систему, находим:  $a = -2$ ,  $b = -2$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ . Получаем

$$\frac{-2x^3 + 11x^2 - 6x - 14}{(x^2 + 4)(x - 3)^2} = \frac{-2x - 2}{x^2 + 4} + \frac{1}{(x - 3)^2}.$$

Теперь находим интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x^3 + 11x^2 - 6x - 14}{(x^2 + 4)(x - 3)^2} dx &= \int \left( \frac{-2x - 2}{x^2 + 4} + \frac{1}{(x - 3)^2} \right) dx = \\ &= - \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 4} + \int \frac{dx}{(x - 3)^2} = \ln(x^2 + 4) - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{x - 3} + C. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 9.

Вычислить определенные интегралы.

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} (4x^2 - 4x + 5) \cos 6x \, dx.$$

РЕШЕНИЕ.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Примем  $u = 4x^2 - 4x + 5$ ,  $dv = \cos 6x \, dx$ . Тогда  $du = (8x - 4) \, dx$ ,  $v = \frac{1}{6} \sin 6x$ .  
Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (4x^2 - 4x + 5) \cos 6x \, dx &= (4x^2 - 4x + 5) \cdot \frac{1}{6} \sin 6x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} (8x - 4) \sin 6x \, dx = \\ &= \left( 4 \cdot \frac{\pi^2}{4} - 4 \frac{\pi}{2} + 5 \right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \sin 3\pi - 0 - \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (2x - 1) \sin 6x \, dx = -\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (2x - 1) \sin 6x \, dx \end{aligned}$$

Еще раз интегрируем по частям. Возьмем  $u = 2x - 1$ ,  $dv = \sin 6x \, dx$ . Тогда  $du = 2 \, dx$ ,  
 $v = -\frac{1}{6} \cos 6x$ . Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (4x^2 - 4x + 5) \cos 6x \, dx &= -\frac{2}{3} \left( -\frac{1}{6} (2x - 1) \cos 6x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} 2 \cos 6x \, dx \right) = \\ &= -\frac{2}{3} \left( -\frac{1}{6} \left( 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \right) \cos 3\pi + \frac{1}{6} (0 - 1) \cos 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \sin 6x \Big|_0^{\pi/2} \right) = \\ &= -\frac{2}{3} \left( \frac{1}{6} (\pi - 1) - \frac{1}{6} - 0 \right) = \frac{2 - \pi}{9}. \end{aligned}$$

$$6) \int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx.$$

РЕШЕНИЕ.

Сделаем замену переменной  $x = 5 \sin t$ . Тогда  $dx = 5 \cos t dt$ . Если  $x_1 = 0$ , то  $t_1 = 0$ , если  $x_2 = 5$ , то  $t_2 = \frac{\pi}{2}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^5 x^2 \sqrt{25 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} 25 \sin^2 t \sqrt{25 - 25 \sin^2 t} 5 \cos t dt = \int_0^{\pi/2} 625 \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{625}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{625}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{625}{8} \left( t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{625\pi}{16}. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЕ 10.

Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{2 \arctg 1/3}^{2 \arctg 1/2} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

РЕШЕНИЕ.

Сделаем замену переменной  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тогда  $\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}$ ;  $dx = \frac{2 dt}{t^2 + 1}$ . Если  $x_1 = 2 \arctg 1/3$ , то  $t_1 = \frac{1}{3}$ ; если  $x_2 = 2 \arctg 1/2$ , то  $t_2 = \frac{1}{2}$ . Получаем:

$$\begin{aligned} I &= \int_{2 \arctg 1/3}^{2 \arctg 1/2} \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{2(t^2 + 1) dt}{(t^2 + 1) \cdot 2t (1 - \frac{2t}{t^2 + 1})} = \\ &= \int_{1/3}^{1/2} \frac{(t^2 + 1) dt}{t(t^2 - 2t + 1)} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{(t^2 + 1) dt}{t(t - 1)^2}. \end{aligned}$$

Разложим дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{(t^2 + 1) dt}{t(t - 1)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t - 1} + \frac{c}{(t - 1)^2}. \quad (2)$$

Приводя дроби в правой части (2) к общему знаменателю, и приравнявая числители, находим:

$$t^2 + 1 = a(t - 1)^2 + bt(t - 1) + ct.$$

Подставляем последовательно различные значения  $t$ :

$$\begin{aligned} t = 0: \quad 1 &= a, \\ t = 1: \quad 2 &= c, \\ t = 2: \quad 5 &= a + 2b + 2c. \end{aligned}$$

Тогда  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ . Получаем:

$$\frac{(t^2 + 1) dt}{t(t-1)^2} = \frac{1}{t} + \frac{2}{(t-1)^2}.$$

Возвращаясь к интегралу, находим:

$$I = \int_{1/3}^{1/2} \left( \frac{1}{t} + \frac{2}{(t-1)^2} \right) dt = \left( \ln |t| - \frac{2}{t-1} \right) \Big|_{1/3}^{1/2} = \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} - \frac{2}{1/2-1} + \frac{2}{1/3-1} = 1 + \ln \frac{3}{2}.$$

ЗАДАНИЕ 11.

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$\text{а) } \int_1^{\infty} \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1 + x^2 + x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{b} + 1 + \operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4} \right) = 0 + 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 1. \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{2x dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \lim_{b \rightarrow 1} \int_0^b \frac{dx^2}{\sqrt{1 - x^4}} = \lim_{b \rightarrow 1} \arcsin x^2 \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow 1} \arcsin b^2 = \frac{\pi}{2}.$$

ЗАДАНИЕ 12.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $r = 2 \cos \varphi$ ,  $r = 2\sqrt{3} \sin \varphi$ ,  $(0 \leq \varphi \leq \pi/2)$ .

РЕШЕНИЕ.

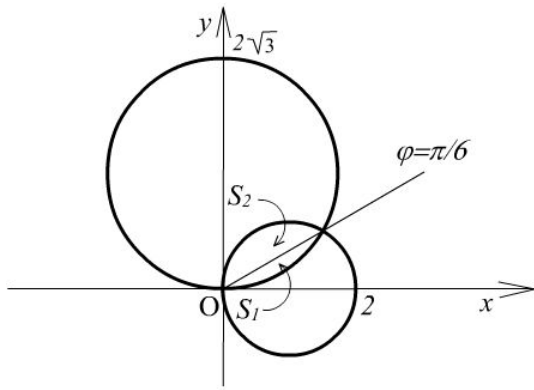


Рис. 8.

Уравнения задают две окружности. Точку их пересечения найдем, решив систему

$$\begin{cases} r = 2 \cos \varphi \\ r = 2\sqrt{3} \sin \varphi \end{cases}$$

Тогда  $2 \cos \varphi = 2\sqrt{3} \sin \varphi$ . Отсюда  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , или  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

Площадь фигуры  $S$  равна сумме двух площадей  $S = S_1 + S_2$  (см. рис. 8). Используем формулу для вычисления площади в полярных координатах

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} (2\sqrt{3} \sin \varphi)^2 d\varphi = 6 \int_0^{\pi/6} \sin^2 \varphi d\varphi = 3 \int_0^{\pi/6} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= 3 \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi/6} = 3 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2} (2 \cos \varphi)^2 d\varphi = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Получаем

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}.$$