

Комплекс учебников из 20 выпусков

Под редакцией В. С. Зарубина и А. П. Крищенко

- I. Введение в анализ
- II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
- III. Аналитическая геометрия
- IV. Линейная алгебра
- V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
- VI. Интегральное исчисление функций одного переменного
- VII. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
- VIII. Дифференциальные уравнения
- IX. Ряды
- X. Теория функций комплексного переменного
- XI. Интегральные преобразования и операционное исчисление
- XII. Дифференциальные уравнения математической физики
- XIII. Приближенные методы математической физики
- XIV. Методы оптимизации
- XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
- XVI. Теория вероятностей
- XVII. Математическая статистика
- XVIII. Случайные процессы
- XIX. Дискретная математика
- XX. Исследование операций

В.Д. Морозова

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Под редакцией В. С. Зарубина, А. П. Крищенко

*Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений*

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
1996

УДК 517.1
ББК 22.161
М80

Рецензенты: чл.-корр. РАН В.А. Садовничий, доц. Н.В. Копченкова

М80 Морозова В.Д. Введение в анализ: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 408 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. I).

ISBN 5-7038-1267-4 (Вып. I)
ISBN 5-7038-1270-4

Книга является первым выпуском учебного комплекса „Математика в техническом университете“, состоящего из двадцати выпусков. Знакомит читателя с понятиями функции, предела, непрерывности, которые являются основополагающими в математическом анализе и необходимыми на начальном этапе подготовки студента технического университета.

Отражена тесная связь классического математического анализа с разделами современной математики (прежде всего, с теорией множеств и непрерывных отображений в метрических пространствах).

Учебник написан на базе курса лекций, прочитанных доцентом МГТУ им. Н.Э. Баумана Морозовой В.Д., и прошел успешную апробацию в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям и аспирантам.

Ил. 82. Табл. 3. Библиогр. 58 назв.

*Выпуск книги финансировал
Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана*

М $\frac{1602070000 - 7}{095(2) - 96}$ Без объявл.

ББК 22.161

ISBN 5-7038-1267-4 (Вып. I)
ISBN 5-7038-1270-4

© В.Д. Морозова, 1996

© Московский государственный
технический университет
им. Н.Э. Баумана, 1996

© Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана, 1996

К ЧИТАТЕЛЮ

Математика зародилась в глубокой древности и к настоящему времени проникла в той или иной степени во многие сферы человеческой деятельности. Математические методы давно и успешно использовались в таких точных науках, как механика, физика, астрономия, находили широкое применение в технике. В последнее время существенно расширилось приложение математики к экономике, химии, биологии, медицине, психологии, лингвистике, социологии и другим гуманитарным наукам. Стали привычными неожиданные на первый взгляд сочетания слов: „математическая экономика“, „математическая биология“, „математическая лингвистика“, но экспансия математики продолжается, и это теперь уже не вызывает удивления. Деятельность же современного инженера просто немыслима без прочного и всестороннего союза с математикой.

Чем же объяснить такую большую роль, которую играет в жизни человеческого общества столь абстрактная и, казалось бы, оторванная от реальности наука?

Проявление человеческого интеллекта в любой конкретной области обычно связано не только с рассмотрением качественных особенностей различных объектов, явлений и процессов, но и с анализом их пространственных и количественных характеристик, для описания и изучения которых необходим общий метод. Именно такой метод, пригодный для самых разнообразных приложений, дает математика. Это достаточно четко сформулировал Фридрих Энгельс: „Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира“.

Надо сказать, что современная математика уже переступила через эту формулировку: она может оперировать такими

объектами и отношениями между ними, которые нельзя представить ни числами, ни геометрическими образами. „Чистые“ математики, движимые внутренней логикой развития своей науки, нередко приходили к теоретическим построениям, которые не сразу обретали практическую интерпретацию. Так, греческие математики изучали свойства эллипса почти за две тысячи лет до того, как немецкий астроном Иоганн Кеплер использовал эти свойства в законах движения планет. В теории относительности Альберт Эйнштейн нашел первое применение результатам, которые были получены математиками примерно за полстолетия до него. Русский ученый Е.С. Федоров и немецкий математик А. Шенфлис на основе представлявшейся чисто умозрительной теории групп решили задачу классификации всех возможных кристаллических решеток.

Суть общего метода математики состоит в том, что для конкретного изучаемого объекта строят или используют готовую математическую модель в виде формул, уравнений, геометрических образов или логических соотношений и затем средствами математического аппарата анализируют ее. Результаты такого анализа проверяют сопоставлением с реальностью и в случае расхождения уточняют математическую модель или отказываются от нее и строят новую. Этапы развития многих естественно-научных направлений в познании законов природы и в совершенствовании техники — это, по существу, построение последовательности все более точных и более полных математических моделей изучаемых явлений. В связи с этим интересны как высказывание Чарлза Дарвина: „У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных“, так и замечание Карла Маркса о том, что любая наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой.

Отвечающая реальности (адекватная) математическая модель — большое научное достижение. Она позволяет провести детальный анализ изучаемого объекта и дать надежный про-

гноз его поведения в различных условиях. Но за адекватность математической модели нередко приходится расплачиваться ее усложнением, что вызывает трудности при ее использовании. В этом случае на помощь математике приходит современная вычислительная техника, существенно расширившая класс математических моделей, допускающих исчерпывающий количественный анализ.

Одни и те же математические модели находят подчас совершенно различные приложения. Известно, что закон взаимодействия двух электрических зарядов и закон притяжения двух масс выражаются формулами с одинаковой структурой. При помощи одной и той же математической модели можно изучать течение жидкости, распространение теплоты, распределение электрического потенциала, деформацию мембраны, напряжения при кручении бруса, фильтрацию нефти в нефтеносном слое или влаги в почве, распространение какой-либо примеси в воздухе или эпидемии в регионе. Благодаря общности математических моделей возникает „родство“ между различными отраслями знаний, что ускоряет их совместное развитие.

Такая общность объясняется тем, что в математике используют абстрактные основополагающие понятия, немногочисленные, но весьма емкие по содержанию. Это позволяет конкретные факты из самых различных областей знаний рассматривать как проявление этих понятий и отношений между ними. Совокупность таких понятий и отношений, выраженных при помощи системы символов и обозначений, образует, по существу, универсальный язык науки. Его универсальность французский математик Анри Пуанкаре выразил одной фразой: „Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем“. Вместе с тем именно абстрактность математики создает определенные трудности при ее изучении и использовании, хотя эти трудности часто преувеличивают. А.И. Герцен считал, что трудных наук нет, есть только трудные изложения.

Есть две крайние точки зрения на то, как лучше осваивать математику. Они связаны с двумя основными аспектами этой науки. В процессе своего становления математика накапливала разрозненные факты и обобщала их в виде все более полных теорий, двигаясь по индукции (латинское слово *inductio* — наведение) от частного к общему. Но уже сформировавшиеся разделы математики строят по дедукции (от латинского *deductio* — выведение), начиная с общих понятий и положений и строго логически выводя из них следствия.

Можно изучать математику индуктивным путем, следуя ее основным этапам развития. Такой пологий подъем легче и очень увлекателен, так как позволяет пережить драму и столкновение идей, которые послужили зародышем многих математических открытий и прорывов в новые области математики. Но это путь изучения скорее не математики, а ее истории. Он не рационален для будущего инженера, да и не реален по затратам времени даже для будущего профессионального математика.

Дедуктивный путь изучения сложнее и требует значительных интеллектуальных усилий, чтобы воспринять уже сложившуюся систему абстрактных понятий и положений и следовать дорогой логически безупречных доказательств. Но зато, взобравшись по крутому склону, можно быстрее обозреть обширные владения математики. Надо прямо сказать, что такой путь не каждому по плечу и предполагает определенный склад мышления. Склонные к инженерной деятельности люди, как правило, абстрактным построениям предпочитают конкретную информацию и нередко утонченную строгость доказательств воспринимают как „торжество науки над здравым смыслом“ (по саркастическому замечанию Алексея Николаевича Крылова (1863–1945), русского инженера-кораблестроителя, механика и математика, первого переводчика с латинского на русский язык „Математических начал натуральной философии“ Ньютона).

Ясно, что оба пути в своих крайних проявлениях не годятся для технического университета. Рациональный путь лежит где-то между ними. Именно такой путь и попытались найти и провести по нему читателя — студента технического университета — составители предлагаемого комплекса учебников. Но читателю стоит помнить, что в математике нет „царских путей“.

Математика является плодом интеллектуальной деятельности всего человеческого общества, но вместе с тем ее многие достижения и открытия связаны с именами конкретных ученых. История математики поучительна и позволяет глубже понять ее содержание и взаимосвязь отдельных разделов. Поэтому в этом (первом) выпуске комплекса учебников помещен краткий очерк основных этапов развития математики до начала XX в. и отмечена роль ученых, оставивших в ней наиболее заметный след. Однако даже простое перечисление тех, кто украсил математику своими творениями, в таком очерке невозможно. Поэтому краткие сведения о математиках, не упомянутых в этом очерке, приведены по мере изложения в основном тексте этого и последующих выпусков.

Математика (как и любая наука) непрерывно развивается. Облик некоторых разделов математики менялся за время жизни одного поколения. Поэтому выучить математику раз и навсегда невозможно. Инженер должен расширять свои познания в математике всю свою творческую жизнь. Но основы следует заложить в молодые годы. В меру своих знаний и опыта составители предлагаемого комплекса учебников стремились помочь в этом читателю, пытались показать не только необходимость математики для инженера, но и ее красоту и гармонию, старались заинтересовать и увлечь математикой. Девизом составителей служили прекрасные слова французского математика, физика и механика С.Д. Пуассона: „Жизнь украшается двумя вещами: занятием математикой и ее преподаванием“.

Одним из условий успешного развития современной техники и ведущих отраслей промышленности является математизация научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ в перспективных технических направлениях. Основным проявлением этой математизации становится широкое использование методов математического моделирования и вычислительного эксперимента. Они состоят в адекватной замене реального технического объекта или процесса соответствующей математической моделью и в ее последующем изучении (экспериментировании с нею) на ЭВМ с помощью вычислительно-логических алгоритмов. Для решения таких задач необходимы специалисты высокой квалификации, профессионально владеющие как инженерными знаниями и навыками, так и математическими методами и их реализацией средствами современной вычислительной техники. Другими словами, качественно нового эффекта можно достичь лишь при комплексной подготовке специалистов по всем звеньям замкнутого цикла вычислительного эксперимента: технический объект — его математическая модель — алгоритм — его реализация на ЭВМ — инженерная интерпретация результатов математического моделирования и их использование при совершенствовании технического объекта.

Подготовка таких специалистов должна стать, по-видимому, одной из основных задач технических университетов, сформировавшихся в последнее время на базе ведущих втузов страны. Отличительной чертой технических университетов должно быть, прежде всего, рациональное сочетание университетского уровня обучения с передовыми достижениями традиционного инженерного образования. Такое сочетание может быть реализовано лишь путем приоритетного усиления цикла общенаучных дисциплин, и в первую очередь математической подготовки студентов. Качество усвоения общенаучных дисциплин определяет глубину и логическую завершенность естественно-научного образования специалистов,

их научное мировоззрение, умение работать с литературой, самостоятельно пополнять свои знания, а также вести успешный поиск новых и перспективных технических решений. Именно эти факторы характеризуют фундаментальность высшего технического образования.

Отмеченные особенности подготовки специалистов в технических университетах выдвигают ряд специфических требований к курсу высшей математики как к основе непрерывного и углубленного математического образования инженера. Этому курсу должны быть присущи общность математических понятий и конструкций, точность формулировок и логическая строгость изложения материала в сочетании с прикладной научно-технической направленностью.

Постановку курса высшей математики в техническом университете и разработку соответствующего учебно-методического обеспечения целесообразно ориентировать на достижение трех основных целей: развитие у студентов культуры мышления (особенно его логического и алгоритмического аспектов); освоение математики как универсального языка науки, необходимого для изучения всех последующих дисциплин; владение математикой как рабочим инструментом анализа и исследования математических моделей.

Кафедра „Прикладная математика“ МГТУ им. Н.Э. Баумана, опираясь на многолетний опыт преподавания математики студентам быстро развивающихся наукоемких машиностроительных и приборостроительных специальностей, попыталась составить комплекс учебников по курсу высшей математики для студентов технических университетов.

Комплекс включает 20 выпусков, охватывающих все основные разделы программы математической подготовки студентов технических университетов. Каждый выпуск посвящен тематически завершенному и относительно самостоятельному разделу курса и разделен на отдельные главы, включающие: теоретический материал; примеры и задачи теоретического

характера; примеры, задачи и контрольные вопросы для выявления отдельных особенностей изучаемой темы, закрепления материала и приобретения практических навыков; прикладные примеры и задачи (некоторые из них требуют для решения применения ЭВМ и могут содержать элементы исследования, быть основой для научно-исследовательской работы студентов).

В конце некоторых глав даны дополнения, посвященные вопросам, не входящим в традиционные (базовые) программы по курсу математики, но нередко изучение именно таких вопросов позволяет студенту, заинтересованному в углублении своего математического образования, шире взглянуть на проблемы современной математики, повысить свою математическую культуру и эрудицию, подготовиться к работе с научной литературой.

Предлагаемые выпуски по своим функциональным возможностям соответствуют набору учебной литературы по курсу высшей математики, в который традиционно входят учебники, учебные пособия и различного рода методические указания по выполнению домашних заданий, контрольных работ и работ лабораторного практикума. Модульная структура комплекса учебников позволяет достаточно гибко составлять программы математической подготовки студентов по конкретным специальностям в виде комбинации отдельных тем из различных выпусков. Изложение материала по каждой теме предусматривает несколько уровней — от базового до углубленного и расширенного за счет дополнительных теоретических разделов и специально подобранных примеров, вопросов и задач.

Составители предлагаемого комплекса учебников надеются, что он будет соответствовать современным требованиям к математической подготовке студентов большинства технических университетов страны.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первый выпуск комплекса учебников по математике обеспечивает самый начальный этап математической подготовки студента технического университета. Базовый уровень изложения материала в этом выпуске предполагает ознакомление с элементами теории множеств (глава 1) и изучение понятий функции, ее предела и непрерывности применительно лишь к действительным функциям одного действительного переменного (частично глава 6 о последовательностях и в значительной мере главы 3, 7, 9 и 10). По объему это примерно половина выпуска.

Программы повышенного уровня предусматривают более подробное по сравнению с базовым знакомство с множествами и их отображениями (глава 1 и частично глава 2). Уровень, который условно можно назвать университетским (имея в виду технические университеты), ориентирован не только на активное применение понятий множества и его отображения, но и на достаточно строгое и последовательное изложение начал математического анализа на современной теоретической основе. Изложение на этом уровне предполагает изучение свойств различного типа множеств (в том числе, метрических пространств, в которых и происходят все главные события в математическом анализе), а затем переход к теории непрерывных отображений метрических пространств, к более полным свойствам последовательностей и к теории пределов.

Особую роль в выпуске играет глава 4. Формально ее содержание не относится к математическому анализу в узком смысле этого термина. Она посвящена алгебраическим операциям и структурам и рассчитана на читателя, заинтересованного в углублении своего математического образования, в

расширении и упорядочении своих представлений о современной математике. Но пройти мимо этой главы нельзя при выборе любого из уровней изучения, поскольку в качестве примеров алгебраических структур в ней рассмотрены комплексные числа, многочлены и подстановки, сведения о которых необходимы в дальнейшем.

В начале книги (после краткого исторического очерка) помещен список основных обозначений, содержащий часто встречающиеся в тексте символы, их расшифровку и номера параграфов, где эти символы введены. В большинстве математических символов использованы буквы латинского и греческого алфавитов, написание и произношение которых представлены после списка обозначений.

В конце книги приведены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в который входят в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все выделенные в тексте **полужирным курсивом** термины с указанием страниц, на которых они строго определены или описаны. Выделение термина **светлым курсивом** означает, что в данном параграфе он является одним из ключевых слов и читателю должно быть известно значение этого термина. Читатель может уточнить это значение, найдя при помощи предметного указателя необходимую страницу.

Ссылки в тексте на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (1.5) — пятая формула в главе 1, (рис. 3.2) — второй рисунок в главе 3), а на параграфы и дополнения — полужирным (например, (см. 1.3) — третий параграф в главе 1, (см. Д.2.2) — второе дополнение ко второй главе).

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК¹

История развития математики насчитывает несколько тысячелетий. Отметим лишь некоторые ее фрагменты и тех, кто внес в развитие математики наибольший вклад.

Важнейшие периоды этой истории — зарождение математики (до VI в. до нашей эры), развитие элементарной математики (VI в. до н.э. — XVI в.н.э.), создание математики переменных величин (XVII в. — I-я половина XIX в.) и период современной математики.

Становление теоретической части математики как науки относят к VI–IV вв. до н.э. Местом, где оно происходило, считают Восточное и Центральное Средиземноморье, а главной побудительной причиной — развитие торгово-экономических отношений между государствами этого региона. Существовавшие в то время другие государства (Китай, Индия) не сохранили свидетельств заметного развития теоретической математики.

Слово „математика“ происходит от греческого *μαθημα* и означает: наука, знание, учение через размышление. Первые древнегреческие научные школы (ионийская и пифагорийская) сделали первые шаги в формировании теоретической математики, опираясь на накопленные в Древнем Египте и Вавилоне сведения. Эти сведения удовлетворяли потребностям в хронологических и коммерческих расчетах, в нахождении расстояний, площадей и объемов при строительстве и в землемерии, а позднее в астрономии и навигации. На основе этих сведений сложились арифметика (от греческого *αριθμος* — число) и геометрия (греческое *γεωμετρία* — землемерие),

¹ Составлен при участии В.Ф. Панова.

а также некоторые элементы тригонометрии (от греческих *τριγωνιον* — треугольник и *μετρεω* — измеряю).

Помимо накопления и освоения разрозненного фактического материала и его систематизации в Древней Греции возникают первые попытки строгих доказательств математических утверждений и логически исчерпывающих решений рассматриваемых задач, начинаются исследования проблемного характера (например, установление возможности или невозможности решения при помощи только циркуля и линейки „великих задач“ о квадратуре круга, трисекции угла и удвоении куба). Получение достаточно общих результатов в области теоретической математики является проявлением интеллекта конкретных людей. Поэтому уже в Древней Греции эти результаты начинают связывать с именами авторов математических сочинений. Большинство этих сочинений дошло до нашего времени лишь в отрывках.

С именем основоположника ионийской школы Фалеса Милетского (640–546 гг. до н.э.) связывают ряд геометрических предложений: „диаметр делит круг пополам“, „в равнобедренном треугольнике углы, противолежащие равным сторонам, подобны“, „противолежащие углы, образованные пересечением двух прямых линий, подобны“, „угол, вписанный в полуокружность, является прямым“. Измерение расстояния корабля от берега по способу Фалеса основано на равенстве двух треугольников, у которых одинакова одна сторона и подобны примыкающие к ней углы (он мыслил углы не как величины, а как фигуры, имеющие некоторую форму, и поэтому говорил не о равенстве их, а о подобии).

В школе Пифагора (VI в. до н.э.) арифметика из искусства вычисления перерастает в теорию чисел, хотя некоторым числам (называемым совершенными) приписывают магическое значение. В связи с геометрической теоремой Пифагора был найден метод получения троек „пифагоровых чисел“ (целых чисел a , b , c , удовлетворяющих уравнению $a^2 + b^2 = c^2$).

С именем Пифагора также связывают учение о четных и нечетных, простых, составных и фигурных числах, об арифметических, геометрических и гармонических пропорциях и средних, о подобии геометрических фигур, систематическое введение в геометрию доказательств, разработку способов построения некоторых многоугольников и многогранников.

Более поздние научные школы античной Греции, связанные, прежде всего, с именами Зенона (V в. до н.э.) и Аристотеля (384–322 гг. до н.э.), сформировали математику как дедуктивную науку, основанную на системе исходных высказываний (определений, аксиом, постулатов). В Александрии (Египет) династией Птолемеев в III в. до н.э. был создан (если использовать современную терминологию) научно-учебный центр Музейон („прибежище муз“), в библиотеке которого было собрано свыше полумиллиона рукописей научного характера. В Музейоне работали почти все крупнейшие ученые эллинистической эпохи — Евклид, Архимед, Аполлоний, Эратосфен и др. Благоприятное влияние Музейона на развитие науки сохранялось почти 700 лет.

В истории человечества есть очень немного имен и книг, пронизывающих века и даже тысячелетия и постоянно влияющих на развитие техники, науки и культуры. В точном естествознании такими остались и до сегодняшнего дня работы Евклида (III в. до н.э.) и Архимеда (287–212 гг. до н.э.). Их труды нужны современному человеку так же, как были необходимы древнему греку, римлянину и средневековому арабу.

Геометрические знания примерно в объеме современного курса средней школы были изложены в „Началах“ Евклида. Конечно, геометрия не могла быть создана одним ученым. Известно, что Евклид в своей работе опирался на труды десятков предшественников, среди которых были Фалес и Пифагор, Демокрит и Гиппократ, Архит, Теэтет, Евдокс. Ценой больших усилий, суммируя отдельные достижения в геометрии, накопленные тысячелетиями благодаря практической деятельности

людей, эти ученые сумели на протяжении трех-четырех столетий привести геометрическую науку к высокой степени совершенства.

Историческая заслуга Евклида состоит в том, что он в своих „Началах“ обобщил результаты своих предшественников, упорядочил и привел в систему основные геометрические знания того времени. В течение двух тысячелетий геометрию изучали в том объеме, порядке и стиле, как она была изложена Евклидом. „Начала“ на протяжении веков были настольной книгой многих ученых (не только математиков).

В Архимеде поражает разнообразие дарований и интересов: математика, механика, инженерное искусство, астрономия, оптика и многое другое. Центральной темой математических работ Архимеда является нахождение площадей поверхностей и объемов различных тел. Решение многих задач этого типа он первоначально нашел, пользуясь аналогиями из механики, а затем строго доказал методом исчерпывания, который, по существу, предвосхищал методы теории пределов. Он вычислил площади эллипса и параболического сегмента, поверхности конуса и шара, объемы шара и шарового сегмента, различных тел вращения и их сегментов.

Он исследовал свойства плоской кривой, названной впоследствии архимедовой спиралью, дал метод построения касательной к этой кривой и нашел площадь ее витка, т.е. оказался предвестником дифференциального и интегрального исчислений. Архимед с большой точностью вычислил отношение π периметра окружности к ее диаметру, указав пределы погрешности: $223/71 < \pi < 22/7$.

Особое значение имеет аксиома Архимеда: из неравных отрезков меньший, будучи повторен определенное число раз, превзойдет больший. Эта аксиома обосновывает алгоритм Евклида последовательного деления величин (например, в арифметике нахождение наибольшего общего делителя двух целых чисел, в геометрии — общей меры двух отрезков).

Из работ Архимеда по механике непосредственно связаны с математикой задачи по нахождению положения центра тяжести различных тел и фигур и вывод законов рычага (ему приписывают фразу: „Дай мне где стать, и я сдвину Землю“). В период Пунических войн он организовал инженерную оборону своего родного города Сиракузы на острове Сицилия, что заставило римлян отказаться от попыток взять город штурмом и перейти к длительной осаде. При взятии города Архимед был убит римским солдатом, которого, по преданию, встретил словами: „Не трогай моих чертежей“. На его могиле был поставлен памятник с изображением цилиндра и вписанного в него шара, а эпитафия гласила, что отношение объемов этих тел равно 3:2 (открытие Архимеда, которое он сам особенно ценил).

После заката античного мира наступает застой и в развитии теоретической математики. Известные математические работы первого тысячелетия нашей эры в основном содержат комментарии теоретических достижений древних, а главное внимание в них уделено вычислительным аспектам. Так, у китайских математиков этого периода описаны способы извлечения квадратных и кубических корней из целых чисел и исключения неизвестных в системе линейных уравнений, указаны достаточно близкие границы для числа π : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Индийские математики ввели в широкое употребление десятичную позиционную систему счисления, обозначая нулем отсутствие единиц данного десятичного разряда; пользовались операциями не только с дробями, но и с отрицательными числами, умели освобождаться от иррациональности в знаменателе дроби.

В IX–XV вв. завоевание арабами обширных территорий привело к заметному влиянию арабской культуры и на развитие математики, причем это влияние не ограничивалось сохранением и передачей европейским математикам достижений античного мира. Работавший в багдадском „Доме мудрости“ (своего рода академии) аль-Хорезми (787–850) изложил индийскую по-

зиционную систему счисления в трактате, который был в XII в. переведен с арабского на латинский язык и стал известен в Европе. Он же в книге, название которой содержало слово „аль-джебр“, обозначавшее операцию перенесения слагаемого с изменением его знака из одной части уравнения в другую, впервые выделил в качестве самостоятельной ветви математики ее раздел, получивший впоследствии название алгебра (латинизированное от „аль-джебр“). В латинизированной форме (Algorithmi) имя аль-Хорезми дало название (алгоритм) всякой системе вычислений, выполняемой по строго определенным правилам.

Известный поэт Омар Хайям (1048–1131), прославившийся своими рубая (четверостишиями), изложил способ решения уравнений до третьей степени включительно, используя пересечение двух конических сечений (эллипса, параболы или гиперболы). Он же в комментариях к „Началам“ Евклида обсуждал вопрос о доказуемости V постулата (постулата о параллельных).

Узбекский астроном и математик Улугбек (1394–1449) в Самаркандской обсерватории собрал более ста ученых и организовал долго остававшиеся непревзойденными по точности астрономические наблюдения. Он разработал алгебраический метод, который позволил составить весьма точные для того времени тригонометрические таблицы. Его сотрудник аль-Каши в трактате „Ключ арифметики“ изложил приемы извлечения корней с использованием формулы бинома для натурального показателя (впоследствии получившей название формулы бинома Ньютона), описал правила действий с десятичными дробями, предложил способ последовательных приближений для решения уравнения третьей степени, а в „Трактате об окружности“, вычисляя периметры вписанного и описанного $3 \cdot 2^{28}$ -угольников, нашел число π с семнадцатью верными десятичными знаками.

Для европейских математиков XII–XV вв. являются в основном периодом усвоения достижений античного мира и Востока.

Главными центрами теоретической мысли в области математики становятся университеты (первые университеты были созданы в XIII в. в итальянских городах Болонья, Салерно, Неаполь, а также в Праге и Вене). В Оксфордском и Парижском университетах в XIV в. объектом изучения и графического представления становятся переменные во времени величины, используются на интуитивном уровне понятия мгновенных скорости и ускорения. В XVI в. европейские математики сумели получить результаты, не известные ни в античном мире, ни на Востоке: были найдены алгебраические решения уравнений третьей и четвертой степеней, описаны правила действий с комплексными числами.

Немецкий художник А. Дюрер (1471–1528) заложил основы ортогонального проектирования, разработал математическую теорию перспективы, предложил способы построения эпициклоид. Одним из его увлечений было составление магических квадратов.

Французский математик Ф. Виет (1540–1603) стал основателем алгебраического буквенного исчисления (до него буквами в уравнениях обозначали лишь неизвестные). Он же применил алгебраические методы к анализу возможности геометрических построений (в частности, восстановил утерянное решение античной задачи о построении окружности, касающейся трех заданных окружностей), дал полное решение задачи об определении всех элементов плоского или сферического треугольника по трем известным элементам, нашел выражение для π в виде бесконечного произведения. Среди своих открытий Ф. Виет больше всего ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений (формулы Виета).

Развитие математики в России в IX–XII вв. находилось на уровне наиболее культурных стран Восточной и Западной Европы, но затем было надолго задержано монголо-татарским нашествием и его последствиями. В Древней Руси была распространена сходная с греко-византийской система числовых

знаков — славянская нумерация, основанная на славянском алфавите, которая доходила до 50-го десятичного разряда и встречалась в русской математической литературе до начала XVIII в., но уже с конца XVI в. ее настойчиво вытесняла принятая ныне десятичная позиционная система.

Первым известным по имени русским математиком был новгородский монах Кирик (XII в.). Его „Наставление, как человеку познать счисление лет“ (1136 г.) посвящено хронологическим расчетам и показывает, что в то время на Руси умели решать довольно сложную задачу вычисления пасхалий (определения на каждый год дня наступления праздника пасхи). В математической форме эта задача сводилась к решению в целых числах неопределенных систем уравнений первой степени с числом неизвестных, превышающим число уравнений.

Наиболее известной из русских математических руководств была изданная в 1703 г. „Арифметика“ Л.Ф. Магницкого (1669–1739), с 1701 г. и до конца своей жизни преподававшего математику в Школе математических и навигацких наук в Москве. Это руководство содержало знаменательное определение: „Арифметика, или численница, есть художество честное, независтное и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное“. В „Арифметике“ наряду с нумерацией, правилами действий с целыми числами и дробями (в том числе десятичными) изложены элементы алгебры, геометрии и тригонометрии и ряд практических сведений о коммерческих расчетах и задачах навигации, введены термины „множитель“, „произведение“, „делитель“, „делимое“, „частное“. По существу, это руководство являлось русской математической энциклопедией того времени. Многие помещенные там сведения были приведены в отечественной литературе впервые. По этому руководству учился М.В. Ломоносов, назвавший его „вратами учености“.

В XVII в. была создана математика переменных величин, которую обычно называют высшей математикой. Одним из ее создателей был французский ученый Рене Декарт (1596–1650). Математические работы Декарта тесно связаны с его философскими и физическими исследованиями. Его работа „Рассуждение о методе“, вышедшая в 1637 г., содержала три приложения: „Диоптрика“, „О метеорах“ и „Геометрия“. В последнем изложены основы аналитической геометрии, базирующейся на методе координат. Созданием метода координат Декарт осуществил взаимопроникновение алгебры и геометрии. Он ввел современные символы для независимых переменных, неизвестных величин и буквенных коэффициентов, а также общепринятое в настоящее время обозначение степеней. Великого ученого обвинили в атеизме, в оскорблении церкви и возбудили против него верующих. Сочинения Декарта были внесены в список запрещенных книг.

Независимо от Декарта к основам аналитической геометрии пришел и французский юрист Пьер Ферма (1601–1665), который знаменит формулировкой до сих пор еще полностью не доказанной „великой теоремы“ из теории чисел, работами по нахождению максимумов и минимумов и по теории вероятностей. Яркой, но короткой была деятельность французского математика Блеза Паскаля (1623–1662), который впервые точно сформулировал и применил в доказательствах метод математической индукции, построил „арифметический треугольник“, образованный биномиальными коэффициентами и впоследствии названный треугольником Паскаля, проводил выкладки с величинами разного порядка малости, установил закон передачи давления газами и жидкостями (закон Паскаля). Вместе с П. Ферма он заложил основы теории вероятностей. В последний период жизни у Б. Паскаля стали преобладать мистические и религиозные интересы, нашедшие отражение в его „Письмах к провинциалу“ и в посмертно опу-

бликованных „Мыслях“ — шедеврах французской и мировой литературы.

Первый этап создания математики переменных величин завершился работами англичанина Исаака Ньютона (1643–1727) и немца Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1718). Имя Ньютона известно всем наравне с другими именами, украшающими историю рода человеческого. Его научные интересы относились к ведущим областям науки того времени — математике, механике, оптике. Математику Ньютон считал основным инструментом физических исследований и разрабатывал для них математические методы. Трудно переоценить значение творчества Ньютона и перечислить все полученные им результаты. С.И. Вавилов писал, что без Ньютона наука развивалась бы иначе, а по мнению Ж. Лагранжа, нет и не будет научной славы, которая превысила бы славу Ньютона.

Важнейшей заслугой Лейбница в области математики является развитие математического анализа, имевшего огромное значение для математики и естествознания. Ему принадлежат также многие результаты исследований в отдельных разделах математики: формула Лейбница для производной любого порядка от произведения двух функций, правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, признак Лейбница сходимости знакопеременных рядов, ряд Лейбница $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ и др. Он ввел много математических терминов и символов, которые сохранились до настоящего времени.

Развитие дифференциального и интегрального исчисления нашло отражение в трудах Лейбница и Ньютона. Однако спор о том, кому из них принадлежит заслуга в открытии дифференциального и интегрального исчисления, не решен и по сей день. Ньютон сформулировал свое открытие на языке механики, а Лейбниц — на языке геометрии. Более ста лет спустя после публикации Лейбницем своих работ английские математики отказывались пользоваться его результатами, а

многие математики на европейском континенте не признавали достижений Ньютона.

Влияние же Ньютона на математиков, его современников, трудно оценить, так как сам он постоянно сомневался в необходимости опубликования своих результатов. Научная школа Лейбница была гораздо более яркой по сравнению со школой Ньютона. Среди учеников Лейбница особенно известны братья Бернулли. Деятельность швейцарской семьи Бернулли, которая в XVIII в. дала миру восемь профессоров математики, знаменует эпоху в истории науки.

Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748) Бернулли по праву вместе с Ньютоном и Лейбницем относят к создателям математического анализа. Книга Я. Бернулли „Арифметические приложения бесконечных рядов и их конечных сумм“ была первым учебником по теории рядов. Ему принадлежит изобретение полярных координат, он вывел формулу для радиуса кривизны произвольной плоской кривой, нашел форму „парусной кривой“ и цепной линии, которые образуют наполненный ветром парус и закрепленная на концах цепь, установил форму упругой линии балки, защемленной одним концом и нагруженной сосредоточенной силой — на другом. Его именем названы многие положения теории вероятностей (схема Бернулли, теорема Бернулли и т.п.).

Брат Якоба Иоганн в 1696 г. поставил перед математиками задачу нового типа: найти кривую, соединяющую две не лежащие на одной вертикали точки, двигаясь по которой из верхней точки в нижнюю тяжелое тело затратит на перемещение кратчайшее время. Журнал, опубликовавший эту задачу, получил, не считая авторского, несколько решений. Одно из них не было подписано, но Иоганн понял, что оно принадлежит Ньютону, узнав его *ex ungue leonem* („как по когтям узнают льва“). Наиболее интересное решение прислал Якоб Бернулли. Искомой кривой оказалась циклоида. Эта задача дала толчок развитию вариационного исчисления.

Сын Иоганна Бернулли Даниил (1700–1782), академик Петербургской академии наук, впервые применил математический анализ к теории вероятностей, а теорию вероятностей — к демографии. Он вывел уравнение установившегося движения жидкости, носящее его имя.

Существенный вклад в развитие математики внесли француз Мишель Ролль (1652–1719), установивший, в частности, что между двумя нулями многочлена расположен по крайней мере один нуль его производной, и англичанин Брук Тейлор (1685–1737), исследовавший ряд, названный впоследствии его именем. В частном виде этот ряд был известен Лейбницу и И. Бернулли, но получил имя шотландского математика Колина Маклорена (1698–1746). Не совсем заслуженно дошло до нас имя маркиза Г. де Лопиталья (1661–1704), принадлежавшего к высшей французской знати, математика-любителя и покровителя математиков. Он учился у И. Бернулли и затем издал его лекции по анализу бесконечно малых, в которых было приведено правило раскрытия неопределенностей. Это правило, установленное И. Бернулли, до сих пор часто называют правилом Лопиталья.

Ведущим математиком XVIII в. был швейцарец Леонард Эйлер (1707–1783) — ученик И. Бернулли, проработавший в Петербургской академии наук 31 год и обретший в России вторую родину. Эйлер хорошо знал русский язык, многие его дети и внуки остались жить в России. XVIII в. в области математики справедливо может быть назван веком Эйлера, так как он сделал важнейшие открытия почти во всех областях математики.

Школьники и сейчас изучают теорию логарифмов и тригонометрию по Эйлеру, а студенты осваивают аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, механику по руководствам, восходящим к его трактатам. Эйлер, по выражению П. Лапласа, был отцом современного анализа и заложил фундамент ряда новых разделов математики. Творче-

ство Эйлера отличают глубина мысли, разнообразие научных интересов и невероятная продуктивность (им написано 866 работ). В 1766 г. Эйлер почти совсем ослеп, но его трудоспособность не снизилась: свои трактаты он диктовал ученикам и помощникам.

„Читайте, читайте Эйлера: это наш общий учитель“, — говорил своим ученикам Пьер Симон Лаплас (1749–1827), современник Эйлера и один из крупнейших французских математиков. И сейчас, спустя два века после смерти Эйлера, его огромное научное наследие изучено еще далеко не полностью.

Параллельно с Эйлером в XVIII в. работали французские математики и механики Жан ле Рон Д'аламбер (иногда пишут Жан Лерон Даламбер) (1717–1783) и Жозеф Луи Лагранж (1736–1813). Даламбер в 24 года стал членом Парижской Академии. Его математические работы относятся к теории дифференциальных уравнений и послужили основой создания математической физики. Он получил важные результаты в теории рядов, в теории функций комплексного переменного и в механике (принцип Даламбера, позволяющий для любой системы тел задачу динамики свести к задаче статики).

Лагранж уже в 16 лет начал преподавать математику в Туринском артиллерийском училище, а в 18 лет стал там же профессором. В своей „Аналитической механике“, изданной в 1759 г., Лагранж убедительно показал, что четыре величины — три декартовы координаты и время — полностью определяют движение материальной точки. Использование в механике аналитических методов и, в частности, уравнений Лагранжа оказалось гибким и более мощным методом исследования, чем все известные ранее. Другие математические работы Лагранжа относятся к вариационному исчислению, математическому анализу, теории чисел, алгебре.

Достижения математиков этого периода влияли и на преподавание математики. В 1794 г. в Париже была основана Политехническая школа. В ней преподавали крупнейшие уче-

ные, в том числе Лагранж. Некоторые студенты начинали математические исследования еще в процессе обучения. Одним из основателей и профессоров этой школы был Гаспар Монж (1746–1818), известный работами по начертательной геометрии, которая составляет научный фундамент современной инженерной графики, и дифференциальной геометрии, изучающей свойства кривых и поверхностей методами математического анализа.

При помощи дифференциального и интегрального исчисления, созданных трудами Ньютона, Лейбница, Эйлера, Лагранжа и других математиков XVII и XVIII вв., удалось решить самые разнообразные задачи — от расчета траектории артиллерийского снаряда до предсказания движения планет и комет. Но основные понятия, с использованием которых достигались эти замечательные результаты, были определены крайне нестрого. Понятие бесконечно малой величины, лежащее в основе тогдашнего математического анализа, было довольно расплывчатым, а сами бесконечно малые величины казались стоящими на грани бытия и небытия, чем-то вроде нуля, но не совсем нуль. Критик Ньютона английский епископ Джордж Беркли (1685–1753) саркастически называл бесконечно малые тенями усопших величин.

В геометрии на протяжении двух тысячелетий авторитет Евклида был незыблем. Усомниться в каком-нибудь из его положений означало окончательно и бесповоротно подорвать свою математическую репутацию. Потребовался научный подвиг русского геометра Николая Ивановича Лобачевского (1792–1856), который в 1829 г., невзирая на насмешки не понимавших его ученых, опубликовал свои труды, сделав неевклидову геометрию (в ней не использовался V постулат Евклида о параллельных) всеобщим достоянием. После появления трудов Лобачевского стало ясно, что существуют по крайней мере две геометрии, одинаково безупречные логически, но приводящие к совершенно различным теориям. Но если это так, то

ссылки на „геометрическую очевидность“ при доказательствах полностью теряют цену: основным геометрическим понятиям — линии, фигуре, телу — надо давать точные определения.

На рубеже XVIII и XIX вв. огромную роль сыграли работы немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777–1855). Уже в 16 лет он стал делать поразительные математические открытия. Для его творчества характерна органическая связь между теоретической и прикладной математикой, широта решаемых им проблем. Труды Гаусса оказали большое влияние на развитие алгебры (доказательство основной теоремы алгебры), теории чисел (квадратичные вычеты), дифференциальной геометрии, теории поля (формула Гаусса — Остроградского), математической физики (принцип Гаусса), теории электричества и магнетизма, геодезии (разработка метода наименьших квадратов) и ряда разделов астрономии. Характерно, что Гаусс опасался публиковать те свои результаты, которые могли вызвать недоброжелательные отзывы некоторых коллег. К идеям неевклидовой геометрии он пришел раньше Лобачевского, не опубликованы им были и открытия в алгебре, позже переоткрытые норвежским математиком Н. Абелем (1802–1829). Профессор теологии Пражского университета Бернард Больцано (1781–1848) во многом предвосхитил тенденции в математике XIX в. к тщательности в трактовке основных понятий математического анализа, хотя его главная математическая работа „Парадоксы бесконечного“ была опубликована лишь посмертно.

Процесс перестройки основ математического анализа на базе теории пределов отчетливо проявился в 20-х гг. XIX в., прежде всего, в знаменитых лекциях французского математика Огюстена Луи Коши (1789–1852), которые он читал в Политехнической школе в Париже. Научная продуктивность Коши была исключительной — им опубликовано 789 работ. Большинство из них посвящено различным областям математического анализа и его приложениям. Значительный вклад Коши внес

в теорию функций комплексного переменного, в теорию дифференциальных уравнений, в теорию рядов, теоретическую и небесную механику, теорию упругости и оптику.

Немецкий математик Бернхард Риман (1826–1866) за свою короткую жизнь в науке (всего около 15 лет) выполнил основополагающие исследования по теории аналитических функций, теории чисел, тригонометрическим рядам, теории интеграла. В знаменитой лекции „О гипотезах, лежащих в основании геометрии“ он развил идеи своего учителя К. Гаусса и обобщил понятие математического пространства, в котором могут быть построены различные варианты неевклидовой геометрии. Идеи и методы Б. Римана открыли новые пути в развитии математики и нашли применение в механике и физике.

Немецкий математик Карл Вейерштрасс (1815–1897) начал свою деятельность учителем гимназии, а потому часть его глубоких исследований печаталась в таких не подходящих для этого изданиях, как гимназические программы. В 1856 г. он получил место профессора в Берлинском университете. С этого времени его лекции и семинары оказывали огромное воздействие на развитие математики. Он первым стал использовать так называемый „язык $\epsilon - \delta$ “.

Вейерштрасс известен также как наставник Софьи Васильевны Ковалевской (1850–1891). В те времена в России и в большинстве западных стран женщинам не был разрешен доступ не только к преподаванию, но и к обучению в высших учебных заведениях. Преодолев все препятствия, Ковалевская в 1883 г. заняла должность доцента, а затем стала профессором Стокгольмского университета. Ее главное достижение в математике — доказательство теоремы о существовании решений нормальной системы уравнений с частными производными (теорема Коши — Ковалевской). За работу „Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки“, содержащую полное решение для случая вращения не вполне симметрично-

го гироскопа, она получила премию Парижской академии наук (удвоенную ввиду большой ценности работы).

В России в XVIII в. научная деятельность в области математики полностью исчерпывается трудами Эйлера и его немногочисленных учеников. Гигантские по количеству и важности результаты Эйлера оставались все же изолированным явлением и не находили широкого научного отклика в России. Не нашли непосредственного развития и многие мысли М.В. Ломоносова о математике, характере ее методов и об их значении. Созданный им в 1755 г. Московский университет выполнял преимущественно учебные функции.

Положение стало изменяться в первой половине XIX в., когда под натиском нарождающегося в России капитализма были проведены некоторые реформы. Возросшая при этом роль науки и образования для экономики России нашла свое выражение в организации ряда университетов с математическими кафедрами — Тартусского (1802), Вильнюсского (1803), Казанского (1804), Харьковского (1805), Петербургского (1819) и Киевского (1834), а затем Одесского (1865), Варшавского (1869) и Томского (1888). Помимо Н.И. Лобачевского из крупных русских математиков XIX в. необходимо прежде всего отметить создателей Петербургской математической школы Михаила Васильевича Остроградского (1801–1862) и Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1894), а также представителей этой школы Андрея Андреевича Маркова (1856–1922) и Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918).

Основные работы М.В. Остроградского были посвящены дифференциальным уравнениям и теории вероятностей, а также механике и магнетизму. А.А. Марков знаменит прежде всего своими результатами в теории вероятностей (полное и строгое доказательство основной предельной теоремы, цепи Маркова, марковские случайные процессы). А.М. Ляпунов создал строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, которая состоит в анализе ре-

шения систем дифференциальных уравнений при стремлении независимого переменного к бесконечности. Он дал полное доказательство центральной предельной теоремы в теории вероятностей, исследовал формы равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения (эта задача была поставлена его учителем П.Л. Чебышевым).

П.Л. Чебышев был одним из наиболее разносторонних русских математиков и механиков. Он получил важнейшие результаты в теории вероятностей, интегральном исчислении, теории чисел, теории приближения функций многочленами, в приложениях математики к теории машин и механизмов, в картографии. Английскому математику Дж. Сильвестру (1814–1897), известному своими работами по алгебре, теории чисел и теории вероятностей, принадлежат знаменательные слова: „Дальнейшего развития теории чисел надо ждать, когда родится некто, настолько же превосходящий Чебышева своей проницательностью и вдумчивостью, насколько Чебышев превосходил этими качествами обыкновенных людей“.

Для творчества П.Л. Чебышева характерна прикладная направленность исследований. По его мнению, сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты и не одна только практика от этого выигрывает — сами науки развиваются под влиянием ее; она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно исследованных; наука находит себе верного руководителя в практике.

П.Л. Чебышев являлся почетным членом Совета Императорского технического училища (теперь МГТУ им. Н.Э. Баумана), в училище публиковали его научные работы, изготавливали и испытывали сконструированные им механизмы и регуляторы. Большую роль в становлении математической подготовки инженеров в училище сыграл один из видных представителей московской школы математиков Алексей Васильевич Летников

(1837–1888), который основал кафедру „Высшая математика“ и руководил ею с 1868 г. Он также возглавлял комиссию по разработке общей системы теоретической и практической подготовки инженеров в училище, получившей всемирную известность как „русский метод обучения“. Крупным вкладом А.В. Летникова в математику является создание теории дифференцирования с произвольным показателем, предвосхитившей работы английского ученого и инженера О. Хевисайда (1850–1925) по операционному исчислению. А.В. Летников был одним из организаторов Московского математического общества, правильно оценил идеи Н.И. Лобачевского и активно их пропагандировал.

Ряд разделов математики был развит в работах механиков, физиков, специалистов в области технических наук. Так, образцы органичного соединения математики и ее приложений дали преподававшие в училище создатели гидроаэродинамики Николай Егорович Жуковский (1847–1921) и его ученик Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869–1942).

Краткий очерк развития математики завершим упоминанием имен еще лишь трех ученых: Эвариста Галуа (1811–1832), Георга Кантора (1845–1918) и Давида Гильберта (1862–1943).

В XIX в. во многих направлениях расширились рамки алгебры, возникли теория групп, теория полей и колец, векторная и тензорная алгебра, линейная алгебра и другие ответвления, которые заполнили все области математики, осуществляя между ними глубокую внутреннюю связь. Алгебраические работы француза Э. Галуа, убитого в 20 лет на дуэли, насчитывают всего 60 страниц, но содержат глубокие идеи, которые были поняты и оценены лишь несколько десятилетий спустя.

Немецкому математику Г. Кантору принадлежит заслуга в создании теории бесконечных множеств, хотя первые шаги в этом направлении сделал Б. Больцано. Г. Кантор доказал возможность установить взаимно однозначное соответствие меж-

ду точками прямой и плоскости, что вызвало у него самого крайнее удивление: „Я это вижу, но я этому не верю“. На базе теории множеств был создан общий язык для многих разделов математики. Эта теория дала толчок возникновению и развитию новых математических дисциплин: теории функций действительного переменного, общей топологии, общей алгебры, функционального анализа и др.

Теория множеств оказала глубокое влияние на понимание самого предмета математики и такого ее большого раздела, как геометрия. Вместе с тем теория множеств привела к неожиданным парадоксам и логическим трудностям, до сих пор не вполне устраненным, что стимулировало развитие современной математической логики, посвященной изучению математических доказательств и оснований математики.

На рубеже XIX и XX вв. самым разносторонним математиком был Д. Гильберт. Он обычно посвящал несколько лет интенсивной работе в одной из областей математики, достигал в этой области важных результатов, иногда кардинально изменявших ее облик, а затем переходил к другой. Им, например, построена наиболее распространенная в настоящее время и общепризнанная система аксиом, действительно достаточная для непротиворечивости евклидовой геометрии. Д. Гильберт проявил необычайную интуицию и дар предвидения, изложив в 1900 г. на конгрессе математиков в Париже 23 проблемы, решение которых в значительной мере определило ход развития математики в XX в. Для его творчества характерны уверенность в неограниченной силе человеческого разума, убеждение в единстве математики и естествознания. Одну из его статей — „Познание природы“ — завершает лозунг: „Мы должны знать — мы будем знать“.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- ◄ и ► — начало и окончание доказательства
- # — окончание примера, замечания
- $a \in A, A \ni a$ — элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a) 1.1
- $a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A (множество A не содержит элемент a) 1.1
- $A = \{a, b, c\}$ — множество A состоит из элементов a, b, c 1.1
- $A = \{x: \dots\}$ — множество A состоит из элементов x , обладающих свойством, указанным после двоеточия 1.1
- $A = \emptyset$ — множество A пусто 1.1
- $A \subset B, B \supset A$ — подмножество A включено в множество B (B включает A) 1.2
- $A \subseteq B, B \supseteq A$ — подмножество A включено в множество B или совпадает с ним 1.2
- $A \not\subset B, B \not\supset A$ — подмножество A не включено в множество B (B не включает A) 1.2
- \mathbb{N} — множество натуральных чисел 1.3
- \mathbb{Z} — множество целых чисел 1.3
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел 1.3
- \mathbb{R} — множество действительных чисел 1.3
- $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая 1.3
- $[a, b]$ — отрезок с концами в точках a и b 1.3
- (a, b) — интервал с концами в точках a и b 1.3
- $[a, b), (a, b]$ — полуинтервалы с концами в точках a и b 1.3
- $|x|$ — абсолютное значение числа x 1.3
- $+\infty, -\infty$ — бесконечные точки расширенной числовой прямой 1.3

- ∞ — объединение бесконечных точек $+\infty$ и $-\infty$ 1.3
 $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ — бесконечные интервалы 1.3
 $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$ — бесконечные полуинтервалы 1.3
 $U(x_0)$ — окрестность точки x_0 1.3, 5.2
 $U(x_0, \varepsilon)$ — ε -окрестность точки x_0 1.3, 5.2
 $A \cup B$ — объединение множеств A и B 1.4
 $A \cap B$ — пересечение множеств A и B 1.4
 $A \setminus B$ — разность множеств A и B 1.4
 $C_B A$ — дополнение множества A до множества B 1.4
 $\bar{A} = \Omega \setminus A$ — дополнение множества A до универсального множества Ω 1.4
 $A \Delta B$ — симметрическая разность множеств A и B 1.4
 $\bigcup_{n=1}^N A_n$ — объединение N множеств $A_1, \dots, A_n, \dots, A_N$ 1.4
 $\bigcap_{n=1}^N A_n$ — пересечение N множеств $A_1, \dots, A_n, \dots, A_N$ 1.4
 $A \Rightarrow B$ — из высказывания A следует B (A — необходимое условие B , а B — достаточное условие A) 1.5
 $A \Leftrightarrow B$ — высказывания A и B равносильны 1.5
 $:\Leftrightarrow$ — утверждение справедливо по определению 1.5
 \vee и \wedge — символы дизъюнкции и конъюнкции 1.5
 $\neg A$ — отрицание высказывания A 1.5
 $\exists x : \dots$ — существует такое x , что ... 1.5
 $\exists! x : \dots$ — существует единственное x , такое, что ... 1.5
 $\nexists x : \dots$ — не существует x , такого, что ... 1.5
 $\forall x$ — для любого x 1.5
 $f: X \rightarrow Y$ — отображение f множества X в (на) множество Y 2.1
 $y = f(x)$ — переменное y — функция переменного x 2.1, 3.1
 $f(a)$ — значение функции $f(x)$ в точке a 2.1, 3.1

- $D(f)$ — область определения (существования) функции $f(x)$ 2.1, 3.1
- $R(f)$ — область значений функции $f(x)$ 2.1, 3.1
- $x = f^{-1}(y)$ — функция, обратная к функции $y = f(x)$ 2.3, 3.3
- $I_X: X \rightarrow X$ — тождественное отображение множества X на себя 2.4
- $g \circ f(x), g(f(x))$ — композиция функций $y = f(x)$ и $g(y)$ (сложная функция аргумента x) 2.4, 3.3
- $M(x, y)$ — точка M плоскости с координатами x (абсцисса) и y (ордината) 2.5
- $X \times Y$ — произведение (декартово) множества X на множество Y 2.5
- \mathbb{R}^n — произведение (декартово) n множеств действительных чисел 2.5
- $\sum_{k=1}^n a_k$ — сумма n слагаемых $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$ 2.6
- $\prod_{m=1}^n a_m$ — произведение n сомножителей $a_1, \dots, a_m, \dots, a_n$ 2.6
- $n!$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно 2.6
- $n!!$ — произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих с ним одинаковую четность 2.6
- A_n^k — количество размещений из n элементов по k элементов 2.6
- P_n — количество перестановок из n элементов 2.6
- C_n^k — количество сочетаний из n элементов по k элементов 2.6
- $k = \overline{1, n}$ — число k принимает последовательно все значения из множества натуральных чисел от 1 до n включительно 2.6
- $\sup X, \sup_{x \in X} x$ — точная верхняя грань множества X 2.7

- $\inf X, \inf_{x \in X} x$ — точная нижняя грань множества X 2.7
 $\text{card } A$ — кардинальное число множества A Д.2.1
 $\text{sgn } x$ — функция знака числа x 3.2
 $[x]$ — целая часть числа x 3.2
 $P_n(x)$ — многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ 3.6, 4.4
 i — мнимая единица ($i^2 = -1$) 4.3
 \mathbb{C} — множество (поле) комплексных чисел 4.3
 $\text{Re } z$ — действительная часть комплексного числа z 4.3
 $\text{Im } z$ — мнимая часть комплексного числа z 4.3
 $\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z 4.3
 \bar{z} — элемент, комплексно сопряженный элементу z 4.3
 $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x и y метрического пространства 5.1
 $\text{diam } X$ — диаметр ограниченного множества X 5.2
 ∂X — граница множества X 5.3
 $C(A)$ — множество функций, непрерывных на множестве A 5.6
 $\sup_{x \in X} f(x)$ — точная верхняя грань (наибольшее значение) функции $f(x)$ на множестве X 5.7
 $\inf_{x \in X} f(x)$ — точная нижняя грань (наименьшее значение) функции $f(x)$ на множестве X 5.7
 $\{x_n\}$ — бесконечная последовательность элементов x_n 6.2
 $\lim \{x_n\}$ — предел последовательности $\{x_n\}$ 6.3
 $\overset{\circ}{U}(a)$ — проколота окрестность точки a 7
 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ — проколота δ -окрестность точки a 7
 $x \rightarrow a$ — переменное x стремится к точке a 7.1
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке a (при $x \rightarrow a$) 7.1

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ — функция $f(x)$ стремится к точке b при стремлении аргумента x к точке a 7.1

$\overset{\circ}{U}_-(a)$ и $\overset{\circ}{U}_+(a)$ — проколотые левая и правая полуокрестности точки a 7.2

$f(a+0)$ — предел справа функции $f(x)$ в точке a 7.2

$f(a-0)$ — предел слева функции $f(x)$ в точке a 7.2

e^x , $\exp(x)$ — экспоненциальная функция (экспонента) аргумента x 7.8

$\ln x$ — натуральный логарифм числа x (по основанию e) 7.8

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ — гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс аргумента x 7.8

$\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x)$ — предел отображения (функции) $f: A \rightarrow Y$ в точке x по множеству A 8.1

Δx и $\Delta y = \Delta f(x)$ — приращения аргумента x и функции $y = f(x)$ 9.1

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ — функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x \rightarrow a$ 10.1

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ — функция $f(x)$ более высокого порядка малости по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \rightarrow a$ 10.1

$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ — функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \rightarrow a$ 10.2

Буквы латинского алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A a A a	а	N n N n	эн
B b B b	бэ	O o O o	о
C c C c	цэ	P p P p	пэ
D d D d	дэ	Q q Q q	ку
E e E e	е	R r R r	эр
F f F f	эф	S s S s	эс
G g G g	же	T t T t	тэ
H h H h	аш	U u U u	у
I i I i	и	V v V v	вэ
J j J j	йот	W w W w	дубль-вэ
K k K k	ка	X x X x	икс
L l L l	эль	Y y Y y	игрек
M m M m	эм	Z z Z z	зэт

Представлен наиболее употребительный (но не единственный) вариант произношения (в частности, вместо „йот“ иногда говорят „жи“).

Буквы греческого алфавита

Начертание	Произношение	Начертание	Произношение	Начертание	Произношение
A α	альфа	I ι	йота	P ρ	ро
B β	бета	K κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	ми	Υ υ	ипсилон
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ни	Φ φ	фи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Χ χ	хи
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

Наряду с указанным произношением также говорят „лямбда“, „мю“ и „ню“.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества

Благодаря высокой степени обобщения теория множеств стала в настоящее время признанной основой для построения математических теорий и моделей, описывающих реальные процессы. Почти каждая книга по современной математике, каждый учебник по высшей математике толкуют о множествах и пестрят символами \in , \subseteq , \cup , \cap , \emptyset и т.п. Не будет исключением и предлагаемый выпуск. Такое нашествие множеств имеет свои причины. Дело в том, что теория множеств — это своего рода математический язык. Без него трудно заниматься математикой, порой даже невозможно объяснить, о чем вообще идет речь.

Математическое понятие *множества* постепенно выделилось из привычных представлений о совокупности, собрании, классе, семействе и т.д. Г. Кантор определил множество как „объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью“. Ему же принадлежит фраза: „Множество есть многое, мыслимое нами как единое“.

В первом издании книги „Теория множеств“ (1939) французских математиков, работающих под псевдонимом Н. Бурбаки, в сводке результатов можно найти фразу: „Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящихся в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств“. Следует отметить, что какие бы трудности ни возникали при определении понятия множества, само это понятие являлось и является мощным средством при изучении и уточнении категории рассматриваемых объектов.

Итак, понятие множества принадлежит к числу исходных математических понятий: оно строго не определено, но может

быть пояснено на примерах. Так, можно говорить о множестве учащихся одного выпуска, множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной прямой, множестве всех решений данного уравнения.

Множества далее будем обозначать большими буквами A, B, \dots, X, Y, Z , а их **элементы** — малыми буквами a, b, \dots, x, y, z . Однако строго придерживаться этого правила невозможно, ибо множества сами могут быть элементами других множеств. То, что x является элементом множества E , обозначают $x \in E$ и говорят, что элемент x принадлежит множеству E (символ \in является **символом принадлежности**; иногда его используют в виде \ni и пишут $E \ni x$, что означает: „Множество E содержит элемент x “). Запись $x \notin E$ (или $x \bar{\in} E$) означает: „Элемент x не принадлежит множеству E “. Если множеству E принадлежат элементы x, y, z , то вместо того, чтобы писать $x \in E, y \in E, z \in E$, пишут $x, y, z \in E$.

Два множества E_1 и E_2 называют равными ($E_1 = E_2$), если они состоят из одних и тех же элементов. Множество считаем заданным, если знаем его элементы или можем их найти. Множество можно задать перечислением его элементов. Перечень элементов множества заключают в этом случае обычно в фигурные скобки. Например, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ — множество, элементами которого являются числа 1, 2, 3, 4 и только они. Множество, содержащее один элемент a , обозначают $\{a\}$.

Наиболее широко используют задание множества с помощью свойства, характеризующего его произвольный элемент x , т.е. такого свойства, которым обладают все элементы этого множества и только они. Для обозначения множества элементов, обладающих некоторым свойством $q(x)$, часто используют запись $\{x: q(x)\}$ или $\{x | q(x)\}$. Например, если A — множество городов России, т.е.

$$A = \{x: x \text{ — город России}\},$$

то характеристическим свойством $q(x)$ для произвольного элемента x является принадлежность к российским городам.

Может случиться, что указанным характеристическим свойством $q(x)$ не обладает ни один элемент. Тогда говорят, что это свойство определяет **пустое множество**, обозначаемое \emptyset . Если множество содержит конечное число элементов, то его называют **конечным**, в противном случае множество является **бесконечным**.

1.2. Подмножества

Если множество A состоит из элементов, принадлежащих некоторому другому множеству E , то A называют **подмножеством**, или частью, множества E . Для обозначения этого используют специальный символ \subseteq , и запись $A \subseteq E$ означает, что A является подмножеством E . Подмножествами множества E , очевидно, являются само множество E и его пустая часть \emptyset . Множество всех подмножеств множества E является некоторым новым множеством, часто обозначаемым $P(E)$, которое можно образовать исходя из множества E . Можно затем рассматривать $P(P(E))$ и т.д.

Пример 1.1. Если $E = \{a, b, c\}$, то

$$P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}. \quad \#$$

В общем случае, если множество E содержит n элементов, то множество его подмножеств $P(E)$ содержит 2^n элементов.

Всякое непустое подмножество A данного множества E называют **собственным подмножеством** E , или правильной частью E . В этом случае записывают $A \subset E$ и говорят, что A включено в E , или $E \supset A$ и говорят, что E включает A (символы \subset и \supset являются **символами включения**; символы \subseteq и \supseteq также являются символами включения, допускающими совпадение множества и его подмножества). Ясно, что если одновременно $A \subset E$ и $A \supset E$ (или $A \subseteq E$ и $A \supseteq E$), то $A = E$, а если $A \subset B$ и $B \subset E$ (или $A \subseteq B$ и $B \subseteq E$), то согласно свойству **транзитивности** символа включения имеем

$A \subset E$ (или $A \subseteq E$). Запись $A \not\subset E$ (или $E \not\supset A$) означает, что A не является подмножеством множества E .

Для задания подмножеств данного множества E могут служить свойства, присущие некоторым элементам множества E . Свойство, отличное от всех свойств элементов E , порождает пустые подмножества множества E . Напротив, наибольшее подмножество, т.е. само множество E , может быть задано любым свойством, присущим всем элементам основного множества. Например, свойство четности *натурального числа* порождает собственное подмножество B четных чисел в *множестве N натуральных чисел*: $B \subset N$.

Отметим, что очень важно не путать символы \subset и \in , поскольку соответствующие им понятия имеют много общего. Например, множеству $E = \{a, \{b, c\}, d\}$ в качестве элемента принадлежит множество $\{b, c\}$, и поэтому наряду с записью $a, d \in E$ в данном случае правомерна запись $\{b, c\} \in E$. Но b и c , являясь каждый в отдельности элементами множества $\{b, c\}$, т.е. $b, c \in \{b, c\}$, не являются элементами E ($b, c \notin E$). В качестве одноэлементных подмножеств множества E вместе с $\{a\}$ и $\{d\}$ можно рассматривать и множество $\{b, c\}$, записав наряду с $\{a\} \subset E$ и $\{d\} \subset E$ также и $\{\{b, c\}\} \subset E$. Однако, казалось бы, более простая запись $\{b, c\} \subset E$ в данном случае будет неверна, так как из нее следует неверный вывод о том, что b и c являются элементами E .

1.3. Множество действительных чисел. Числовая прямая

Действительные (вещественные) числа хорошо известны из школьного курса математики. Кратко остановимся на их свойствах, достаточно легко воспринимаемых каждым из нас. *Действительные числа образуют множество элементов, обладающих следующими свойствами.*

1. Свойство упорядоченности. Для любых двух чисел a и b определено соотношение порядка, т.е. два любых действи-

тельных числа a и b удовлетворяют одному из следующих соотношений: $a < b$, $a = b$ или $a > b$; при этом если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (*транзитивность упорядоченности*).

2. Свойства операции сложения. Для любой пары чисел a и b определено такое единственное число, называемое их *суммой* и обозначаемое $a + b$, что выполняются следующие свойства:

1° $a + b = b + a$ (*коммутативность*);

2° $a + (b + c) = (a + b) + c$ для любых чисел a , b и c (*ассоциативность*);

3° существует такое число, называемое *нулем* и обозначаемое 0 , что $a + 0 = a$ для любого числа a ;

4° для любого числа a существует такое число, называемое *противоположным* a и обозначаемое $-a$, что $a + (-a) = 0$;

5° если $a < b$, то $a + c < b + c$ для любого числа c . Нуль единствен, и для каждого числа единственно противоположное ему число. Для любой пары чисел a и b число $a + (-b)$ называют *разностью* чисел a и b и обозначают $a - b$.

3. Свойства операции умножения. Для любой пары чисел a и b определено такое единственное число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab (или $a \cdot b$), что:

1* $ab = ba$ (*коммутативность*);

2* $a(bc) = (ab)c$ для любых чисел a , b и c (*ассоциативность*);

3* существует такое число, называемое *единицей* и обозначаемое 1 , что $a \cdot 1 = a$ для любого числа a ;

4* для любого числа a , не равного нулю, существует такое число, называемое *обратным* к данному и обозначаемое $1/a$, что $a \cdot (1/a) = 1$;

5* если либо a , либо b , либо и a и b равны нулю, то $ab = 0$;

6* если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$. Единица единственна, и для каждого ненулевого числа существует единственное обратное к нему. Для любой пары чисел a и b ($b \neq 0$) число

$a \cdot (1/b)$ называют **частным** от деления a на b и обозначают a/b .

Число $1+1$ обозначают 2, число $2+1$ обозначают 3 и т.д. Эти числа 1, 2, 3, ... называют **натуральными числами**. Числа, большие нуля, называют **положительными**, а числа, меньшие нуля — **отрицательными**. Числа 0, ± 1 , ± 2 , ... называют **целыми числами** (вместо $+a$ пишут a). Числа вида m/n , где m — целое, а n — натуральное, называют **рациональными числами**. Они включают в себя все целые числа. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют **иррациональными**.

4. Свойство **дистрибутивности** умножения относительно сложения: для любой тройки чисел a , b и c $(a+b)c = ac + bc$.

5. Архимедово свойство: каково бы ни было число a , существует такое целое число n , что $n > a$.

Прежде чем сформулировать последующее свойство действительных чисел, напомним, что на прямой задана **система отсчета**, если на этой прямой фиксированы две различные точки (точки O и e на рис. 1.1). Левую из них (точку O) называют началом отсчета, а длина отрезка Oe

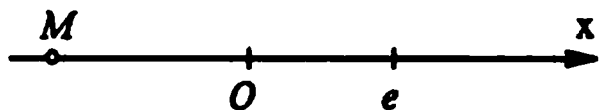


Рис. 1.1

задает единицу масштаба. Прямую с заданной системой отсчета называют **координатной осью**. Ее обычно обозначают Ox . Точка O делит координатную ось на две части: положительную полуось, где лежит точка e , и отрицательную полуось.

Координатой точки M на оси Ox называют длину отрезка OM , взятую со знаком $+$, если точка M лежит на положительной полуоси, и со знаком $-$, если точка M лежит на отрицательной полуоси.

Очевидно, что каждой точке M на оси Ox соответствует действительное число x , а именно, ее координата. И обратно,

каждому действительному числу на оси Ox соответствует точка, для которой это действительное число является ее координатой. Всякий раз, когда это потребуется, будем считать, что между действительными числами и точками некоторой прямой установлено такого рода соответствие. Таким образом, совокупность всех действительных чисел можно рассматривать как **числовую прямую**. Иногда вместо числовой прямой используют также термин „вещественная прямая“. Отождествление действительных чисел с точками на числовой прямой будет в дальнейшем чрезвычайно полезным, так как служит вспомогательным средством для понимания и мотивировки введения новых понятий.

Подмножество X множества действительных чисел называют **промежутком**, если вместе с любыми двумя числами x_1, x_2 это подмножество содержит любое x , заключенное между ними. Используют промежутки следующих видов:

$(a, b) = \{x: a < x < b\}$ — **открытый промежуток**, или **интервал**;

$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}$ — **замкнутый промежуток**, или **отрезок** (иногда используют термин „сегмент“);

$(a, b] = \{x: a < x \leq b\}$ и $[a, b) = \{x: a \leq x < b\}$ — **полуинтервалы**.

Если $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2]$, то отрезок $[a_2, b_2]$ называют **вложенным** в отрезок $[a_1, b_1]$. А теперь для множества действительных чисел сформулируем следующее свойство.

6. Свойство непрерывности. Для всякой системы вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

существует хотя бы одна точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы. Это свойство называют также **принципом вложенных отрезков** (**принципом Кантора**).

Из перечисленных свойств 1–6 действительных чисел можно получить, что $1 > 0$, а также правила действий с рациональными

ми дробями; правила знаков при умножении и делении действительных чисел; правила преобразования равенств и неравенств; свойства абсолютного значения действительного числа.

Абсолютным значением (или **модулем**) $|a|$ любого действительного числа a называют действительное число, удовлетворяющее условиям

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Отсюда следует, что абсолютное значение любого действительного числа неотрицательно ($|a| \geq 0$), а также

$$|a| = |-a|, \quad |a| \geq a, \quad |a| \geq -a, \quad -|a| \leq a \leq |a|. \quad (1.2)$$

Геометрически $|a|$ соответствует расстоянию между точками числовой прямой, изображающими числа 0 и a .

Пусть справедливо неравенство $|a| < \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число ($\varepsilon > 0$). Покажем, что это неравенство в силу условий (1.1) равносильно двойному неравенству

$$-\varepsilon < a < \varepsilon.$$

В самом деле, если $a \geq 0$, то $-\varepsilon < a$ и $|a| = a < \varepsilon$. Если же $a < 0$, то $a < \varepsilon$ и $|a| = -a < \varepsilon$. Итак, в любом случае получаем, что $-\varepsilon < a < \varepsilon$. Пусть теперь справедливо неравенство $-\varepsilon < a < \varepsilon$, или $a < \varepsilon$ и $-a < \varepsilon$. Тогда если $a \geq 0$, то $|a| = a < \varepsilon$, а если $a < 0$, то $|a| = -a < \varepsilon$, т.е. в любом случае справедливо $|a| < \varepsilon$.

Равносильность рассмотренных неравенств будет сохранена, если строгие неравенства ($<$) заменить на нестрогие (\leq): $|a| \leq \varepsilon$ равносильно $-\varepsilon \leq a \leq \varepsilon$.

Для любых действительных чисел a и b справедливо равенство

$$|ab| = |a| \cdot |b| \quad (1.3)$$

и выполняются неравенства

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (1.4)$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||. \quad (1.5)$$

Убедимся сначала в справедливости (1.3). Если $ab > 0$, то либо $a > 0$, $b > 0$ и с учетом (1.1)

$$|ab| = ab = |a| \cdot |b|,$$

либо $a < 0$, $b < 0$ и согласно (1.1) и (1.2)

$$|ab| = ab = (-a)(-b) = |-a| \cdot |-b| = |a| \cdot |b|.$$

Если же $ab < 0$, то либо $a > 0$, $b < 0$ и с учетом (1.1) и (1.2)

$$|ab| = -ab = a(-b) = |a| \cdot |-b| = |a| \cdot |b|,$$

либо $a < 0$, $b > 0$ и снова согласно (1.1) и (1.2)

$$|ab| = -ab = (-a)b = |-a| \cdot |b| = |a| \cdot |b|.$$

Случай $ab = 0$ возможен, когда либо $a = 0$, либо $b = 0$, либо и $a = 0$, и $b = 0$. Тогда обе части (1.3) будут равны нулю.

При помощи (1.1) и (1.2) докажем неравенство (1.4): если $a + b \geq 0$, то

$$|a + b| = a + b \leq |a| + |b|,$$

а если $a + b < 0$, то

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) < |a| + |b|.$$

Используя (1.4), преобразуем

$$|a| - |b| = |(a - b) + b| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b|$$

и аналогичным образом $|b| - |a| \leq |b - a|$, или с учетом (1.2)

$$-(|a| - |b|) \leq |a - b|.$$

Согласно (1.1) одно из чисел $|a| - |b|$ или $-(|a| - |b|)$ совпадает с $||a| - |b||$, что доказывает (1.5).

Свойства 1–6 полностью описывают **множество** всех **действительных чисел**. Иначе говоря, если эти свойства

назвать **аксиомами**, то окажется, что действительные числа — это совокупность элементов, удовлетворяющих аксиомам 1–6.

Множество всех действительных чисел, а также множество точек числовой прямой обычно обозначают \mathbf{R} .

Пополненным (или **расширенным**) **множеством действительных чисел** называют множество, образованное из всех действительных чисел $x \in \mathbf{R}$ с добавлением двух элементов, обозначаемых $+\infty$ („плюс бесконечность“) и $-\infty$ („минус бесконечность“). При этом полагают, что $-\infty < +\infty$ и для всех чисел $x \in \mathbf{R}$ справедливо $-\infty < x < +\infty$, а пополненное множество обозначают $\overline{\mathbf{R}}$. Ему соответствует **расширенная** (или **пополненная**) **числовая прямая**. Элементы $-\infty$ и $+\infty$ называют **бесконечными точками** такой прямой.

Условие $x < y$ означает, что на числовой прямой число x лежит левее числа y . Поэтому $-\infty$ можно себе представить как точку, лежащую левее каждой точки прямой, а $+\infty$ — как точку, лежащую правее каждой точки прямой. Однако таким представлением можно пользоваться только как наглядной геометрической иллюстрацией. Мы не будем считать $-\infty$ и $+\infty$ числами, так как не производим никаких операций между действительными числами и элементами $-\infty$ и $+\infty$. Чтобы подчеркнуть отличие этих элементов от действительных чисел, последние иногда называют **конечными числами** (им соответствуют **конечные точки** числовой прямой). Объединение элементов $-\infty$ и $+\infty$ обозначают просто ∞ .

Рассмотрим некоторые подмножества множества \mathbf{R} действительных чисел, которыми будем широко пользоваться в дальнейшем, и познакомимся с их обозначениями.

1. Множество целых чисел

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

есть собственное подмножество множества \mathbf{R} ($\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$).

2. Множество натуральных чисел

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

является собственным подмножеством как множества \mathbf{Z} , так и множества \mathbf{R} ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$).

3. Множество всех действительных чисел, которые представимы в виде частного от деления целого числа $m \in \mathbf{Z}$ на натуральное $n \in \mathbf{N}$, называют **множеством рациональных чисел** и обозначают \mathbf{Q} , т.е.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Отношения m/n и m'/n' считают равными (представляющими одно и то же рациональное число $r \in \mathbf{Q}$), если $mn' = nm'$. Таким образом, у каждого рационального числа $r = m/n$ может быть бесконечно много изображений $r = pm/(pn)$, $p \in \mathbf{N}$. Это, в частности, позволяет два разных рациональных числа $r = m/n$ и $r' = m'/n'$ изображать в виде дробей с одинаковым знаменателем nn' , т.е. $r = mn'/(nn')$ и $r' = nm'/(nn')$. Элементу $r \in \mathbf{Q}$ на числовой прямой Ox отвечает точка M , такая, что отрезок OM соизмерим с отрезком, длина которого принята за единицу. Очевидно, что $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

На пополненной числовой прямой различают **бесконечные интервалы**

$$(b, +\infty) = \{x : x > b\}, \quad (-\infty, a) = \{x : x < a\}$$

и **бесконечные полуинтервалы**

$$[b, +\infty) = \{x : x \geq b\}, \quad (-\infty, a] = \{x : x \leq a\}.$$

По аналогии с бесконечными интервалами множество всех точек на числовой прямой \mathbf{R} обозначают часто $(-\infty, +\infty)$ или просто $(-\infty, \infty)$. Заметим, что вместо круглой скобки в обозначении интервалов и полуинтервалов иногда используют перевернутую квадратную скобку: например, вместо (a, b) пишут $]a, b[$.

Любой интервал (a, b) , содержащий некоторую точку x_0 , называют **окрестностью этой точки** и обозначают $U(x_0)$,

т.е. $U(x_0) = (a, b)$, если $x_0 \in (a, b)$. Точку x_0 , расположенную в середине своей окрестности (a, b) , в этом случае именуют **центром окрестности**, а расстояние $\varepsilon = (b - a)/2$ — **радиусом окрестности**. Тогда множество $\{x: |x - x_0| < \varepsilon\}$ называют **ε -окрестностью точки x_0** и обозначают $U(x_0, \varepsilon)$.

На расширенной числовой прямой вводят понятие окрестности и для бесконечных точек $+\infty$ и $-\infty$, тем самым уравнивая эти точки с конечными при рассмотрении многих вопросов. Пусть M — некоторое положительное число. Тогда $U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > M\}$ и $U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x < -M\}$, а для объединения бесконечных точек $U(\infty) = \{x \in \mathbb{R}: |x| > M\}$. Ясно, что для любой из бесконечных точек окрестность с меньшим значением M включает окрестность с большим значением M .

На числовой прямой могут быть заданы подмножества из дискретно расположенных точек (от латинского слова *discretus* — разделенный, прерывистый). Множества \mathbb{N} натуральных и \mathbb{Z} целых чисел являются примерами дискретных подмножеств множества \mathbb{Q} рациональных (разумеется, и множества \mathbb{R} действительных) чисел.

1.4. Операции над множествами

В каждой конкретной задаче **множества**, имеющие к ней отношение, лежат обычно в некотором так называемом **универсальном множестве** (иногда его именуют **универсумом**). Так, если разговор идет только о собаках и кому-то захотелось высказаться о многих породах собак, то не следует упоминать о верблюдах, и разумно считать таким универсальным множеством множество всех собак. Если же разговор идет о собаках, кошках и птицах, то универсальным множеством удобнее считать множество всех животных. **Множество действительных чисел, делящихся на 3, является подмножеством множества \mathbb{Z} целых чисел.** В этом конкретном случае

множество Z может выполнить роль универсального. Итак, универсальному множеству должны принадлежать все те элементы, которые допустимо рассматривать при решении данной задачи. Для выбора такого множества нет какого-то раз и навсегда установленного способа. Но если выбор сделан, этим универсальным множеством можно пользоваться в качестве всеобъемлющего при решении этой задачи.

Будем рассматривать множества, являющиеся подмножествами некоторого универсального множества Ω . Эти множества можно комбинировать между собой, получая другие множества. Среди бесчисленного количества мыслимых способов комбинирования очень мало полезных, и самые полезные из них — объединение и пересечение.

Определение 1.1. *Объединением* некоторой совокупности *подмножеств* универсального множества Ω называют его подмножество, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному из подмножеств этой совокупности.

Объединение подмножеств A и B обозначают $A \cup B$, а объединение подмножеств A, B, C — $A \cup B \cup C$. Для объединения подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, A_N$ используют обозначение

$$\bigcup_{n=1}^N A_n.$$

Объединение подмножеств A_i , занумерованных с помощью некоторого множества индексов J , обозначают

$$\bigcup_{i \in J} A_i.$$

Определение 1.2. *Пересечением* некоторой совокупности *подмножеств* универсального множества Ω называют его подмножество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно всем подмножествам этой совокупности.

Операцию пересечения подмножеств обозначают соответственно $A \cap B$, $A \cap B \cap C$,

$$\bigcap_{n=1}^N A_n \quad \text{и} \quad \bigcap_{i \in J} A_i.$$

Пример 1.2. Если $A = \{1, 2, 3, 9\}$ и $B = \{1, 2, 5, 7\}$, то

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} \quad \text{и} \quad A \cap B = \{1, 2\}. \quad \#$$

Подмножества A и B называют **непересекающимися**, если их пересечение пусто (является *пустым множеством*), т.е. $A \cap B = \emptyset$.

Определение 1.3. *Разностью множеств B и A называют множество всех элементов из B , не являющихся элементами A .*

Разность множеств B и A обозначают $B \setminus A$. Если A является подмножеством B , то $B \setminus A$ называют также дополнением множества A до множества B и обозначают $C_B A$. Ясно, что $C_A A = A \setminus A = \emptyset$. В дальнейшем, как правило, будем рассматривать дополнения множеств до универсального множества Ω и называть их просто **дополнениями**. Дополнение A до Ω будем обозначать \bar{A} . Тогда $\bar{A} = \Omega \setminus A$ и

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= \Omega \setminus \bar{A} = \Omega \setminus (\Omega \setminus A) = A, \\ A \cup \bar{A} &= A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega, \\ \bar{\Omega} &= \emptyset, \\ A \cap \bar{A} &= A \cap (\Omega \setminus A) = \emptyset, \\ A \cap \bar{B} &= A \cap (\Omega \setminus B) = A \setminus B, \\ \bar{\emptyset} &= \Omega. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Через операции объединения, пересечения и разности множеств A и B можно с учетом (1.6) определить операцию

симметрической разности

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \\ &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}), \end{aligned}$$

т.е. $A \Delta B$ — это множество элементов, принадлежащих или только A , или только B , но не обоим множествам A и B одновременно (например, $\{1, 2, 3\} \Delta \{2, 3, 4\} = \{1, 4\}$). Ясно, что

$$A \Delta A = \emptyset, \quad A \Delta \emptyset = A = \emptyset \Delta A \quad \text{и} \quad A \Delta \overline{A} = \Omega.$$

Иногда симметрическую разность называют **дизъюнктивной суммой** и вместо $A \Delta B$ пишут $A \oplus B$.

Операции \cup и \cap (подобно сложению и умножению чисел) обладают некоторыми общими свойствами:

- 1) **коммутативностью** — $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$;
- 2) **ассоциативностью** — $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ и $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 3) **идемпотентностью** — $A \cup A = A$ и $A \cap A = A$;
- 4) **дистрибутивностью** — $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Для любых двух множеств A и B справедливы следующие два тождества:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{и} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad (1.7)$$

называемые **законами де Моргана** по имени шотландского математика О. де Моргана (1806–1871). Для симметрической разности отметим следующие свойства:

$$\begin{aligned} A \Delta B &= B \Delta A, \\ (A \Delta B) \Delta C &= A \Delta (B \Delta C), \\ A \cap (B \Delta C) &= (A \cap B) \Delta (A \cap C). \end{aligned}$$

Все приведенные соотношения нетрудно доказать. В качестве примера докажем справедливость первого из соотношений свойства дистрибутивности и первого из законов де Моргана.

Предположим сначала, что $x \in A \cup (B \cap C)$, т.е., согласно определению 1.1 операции объединения, возможно как $x \in A$, так и $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то с учетом этого же определения x принадлежит объединению A с любым множеством, и можно считать, что $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Если же $x \in B \cap C$, то, по определению 1.2 операции пересечения, это означает, что одновременно $x \in B$ и $x \in C$, т.е. снова можно считать, что $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Отсюда с учетом определения 1.2 следует, что $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, а исходное предположение приводит к включению $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Пусть теперь $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Это означает, что одновременно $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, т.е. возможно как $x \in A$, так и $x \notin A$. Если $x \in A$, то можно считать, что $x \in A \cup (B \cap C)$. Если же $x \notin A$, то обязательно $x \in B$ и $x \in C$, т.е. $x \in B \cap C$, и снова имеем $x \in A \cup (B \cap C)$. Таким образом, второе предположение приводит к обратному включению $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$, что и доказывает справедливость равенства $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Перейдем к доказательству первого закона де Моргана. Пусть сначала $x \in \overline{A \cup B}$, т.е. $x \notin A \cup B$. С учетом определения 1.1 операции объединения это означает, что одновременно $x \notin A$ и $x \notin B$, и поэтому одновременно $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$. Отсюда, согласно определению 1.2 операции пересечения, получаем $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, а исходное предположение приводит к включению $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Теперь предположим, что $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Тогда одновременно $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B}$, т.е. одновременно $x \notin A$ и $x \notin B$, а это означает, что $x \notin A \cup B$, и поэтому $x \in \overline{A \cup B}$. Таким образом, второе предположение приводит к обратному включению $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, что и доказывает справедливость равенства $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Рассмотренные свойства операций объединения и пересечения и законы де Моргана отвечают *принципу двойственности* (или *дуальности*). Он состоит в том, что в каждой паре записанных выше соотношений одно можно получить из друго-

го заменой символов \cup и \cap соответственно на \cap и \cup . Если некоторое подмножество E множества Ω можно получить из других подмножеств A, B, \dots применением в некотором определенном порядке одних только операций объединения, пересечения и дополнения, то, согласно этому принципу, дополнение \bar{E} можно получить заменой подмножеств A, B, \dots их дополнениями и заменой символов \cup, \cap на \cap, \cup соответственно. Каждый из законов де Моргана является частным случаем действия этого правила. Аналогичным образом можно оперировать и символами включения (если $A \subset B$, то $\bar{A} \supset \bar{B}$, а если $\bar{C} \subseteq D$, то $\bar{C} \supseteq \bar{D}$).

1.5. Некоторые основные логические символы

Для математики характерно широкое использование символики, которая, по сути, является аппаратом формальной логики. Формальная, или символическая, логика — это специальный метод познания структуры мышления. Такой разработанный аппарат используют везде. В математике многие важные положения удается записывать в виде символов. Запись логических рассуждений в символах придает доказательствам более краткий, простой вид.

Формальная логика оперирует высказываниями (из них, кстати, состоит и наша речь). *Высказыванием* называют предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, что оно истинно или ложно.

Пример 1.3. „Москва — столица России“, „Петров И.И. — студент МГТУ“, $x^2 + y^2 = 1$, $x \in \mathbb{R}$ — высказывания; $x^2 - 2x + y^2$ — не является высказыванием. #

Соединяя простые высказывания словами „и“, „или“, „не“, „если ..., то“, мы получаем более сложные высказывания, которые определяют нашу речь. В математике эти слова называют логическими связками, в формальной логике они

соответствуют основным **логическим символам**, на которых мы кратко и остановимся.

1. **Конъюнкцией** $p \wedge q$ высказываний p и q называют высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания (и p , и q) истинны. Логический символ конъюнкции \wedge заменяет в речи союз „и“. Конъюнкцию обозначают также $p \& q$.

2. **Дизъюнкцией** $p \vee q$ высказываний p и q называют высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда оба высказывания ложны, а истинно, когда хотя бы одно из них (p или q) истинно. Логический символ дизъюнкции \vee в речи заменяет слово „или“.

3. **Импликацией** $p \Rightarrow q$ высказываний p и q называют высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда p истинно, а q — ложно. Логический символ импликации \Rightarrow используют при указании на последствия некоторого факта. Он заменяет слова „если ..., то“. Можно также читать „ p влечет q “.

4. Логический символ **эквиваленции** \Leftrightarrow означает, что высказывание $p \Leftrightarrow q$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания p и q истинны или оба высказывания ложны. Этот символ заменяет в речи слово „равносильно“.

5. **Отрицанием** высказывания p называют высказывание $\neg p$, которое истинно, если p ложно, и ложно, когда p истинно. Логический символ \neg в речи заменяет слово „не“.

Для сокращения и уточнения записи высказываний вводят два знака \forall и \exists , называемых соответственно **кванторами общности** и **существования**. Выражение „для всякого элемента x множества E “ записывают в виде $\forall x \in E$. Эта запись означает, что утверждение, следующее за ней, будет выполнено для произвольного элемента множества E . Запись $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ означает: „каковы бы ни были элементы x_1, x_2, \dots, x_n множества E “. Выражение „существует по крайней мере один элемент множества E , такой, что ...“ записывают $\exists x \in E$: ... Все, что следует за этой записью, выпол-

няется хотя бы для одного элемента множества E . Наоборот, $\forall x \in E: \dots$ означает, что все следующее далее не выполняется ни для одного элемента из E . Выражение „существует один и только один элемент из E , такой, что ...“ записывают в виде $\exists! x \in E: \dots$. Запись $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in E: \dots$ означает: „существуют такие элементы x_1, x_2, \dots, x_n множества E , что ...“.

Введенными символами удобно пользоваться, например, при определении операций над множествами. Так,

$$A \cup B :\Leftrightarrow \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

$$A \cap B :\Leftrightarrow \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

$$A \setminus B :\Leftrightarrow \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

$$\bar{A} :\Leftrightarrow \{x : (x \in \Omega) \wedge (x \notin A)\},$$

где символ $:\Leftrightarrow$ означает эквивалентность по определению.

Связь теории множеств и формальной логики достаточно широка. Исследованием этой связи впервые занимался английский математик Джордж Буль (1815–1864), работы которого положили начало одному из важнейших направлений современной алгебры, называемому *булевой алгеброй*.

Ясно, что взятие *дополнения* тесно связано с отрицанием высказывания, операции *объединения* и *пересечения* множеств — с дизъюнкцией и конъюнкцией высказываний соответственно, включение *подмножества* в множество — с импликацией, а равенство множеств — с эквиваленцией высказываний. В силу этой связи с помощью теории множеств можно решать некоторые логические задачи.

Пример 1.4. Рассмотрим набор высказываний:

- 1) животные, которых не видно в темноте, серы;
- 2) соседи не любят тех, кто не дает им спать;
- 3) кто крепко спит, громко храпит;
- 4) соседи любят животных, которых видно в темноте;
- 5) все слоны крепко спят;
- 6) кто громко храпит, не дает спать соседям.

Эти высказывания можно перевести на язык теории множеств, если ввести следующие обозначения:

A – множество тех, кто будит соседей;

B – множество тех, кто крепко спит;

C – множество тех, кто громко храпит;

D – множество животных, которых видно в темноте;

E – множество слонов;

F – множество тех, кого любят соседи;

G – множество тех, кто серые.

Высказывание 1) означает, что элементы, не лежащие в D , содержатся в G , т.е. 1) $\overline{D} \subseteq G$. Остальные высказывания принимают вид:

$$2) A \subseteq \overline{F}; \quad 3) B \subseteq C; \quad 4) D \subseteq F; \quad 5) E \subseteq B; \quad 6) C \subseteq A.$$

Взяв дополнения множеств D и F , из 4) согласно *принципу двойственности* получим $\overline{F} \subseteq \overline{D}$ и затем соединим все высказывания в цепочку

$$E \subseteq C \subseteq A \subseteq \overline{F} \subseteq \overline{D} \subseteq G.$$

Из этой цепочки (с учетом свойства *транзитивности* символа включения) следует, что $E \subseteq G$, т.е. все слоны серы. #

Рассмотренные логические символы и кванторы существования и общности широко используют математики для записи предложений, в которых они, по сути, воплощают плоды своего творчества. Эти предложения представляют собой устанавливающие свойства математических объектов теоремы, леммы, утверждения и следствия из них, а также различные формулы. Однако следует отметить, что часть предложений приходится все же выражать словами.

Любая *теорема* состоит, вообще говоря, в задании некоторого свойства A , называемого *условием*, из которого выводят свойство B , называемое *заключением*. Коротко теорему „ A влечет B “ записывают в виде $A \Rightarrow B$ и говорят, что A является *достаточным условием* для B , а B — *необходимым*

условием для A . Тогда **обратная теорема** имеет вид $B \Rightarrow A$ (возможна запись при помощи обратной импликации $A \Leftarrow B$), но справедливость прямой теоремы еще не гарантирует справедливости обратной ей теоремы. Если справедливы данная теорема и обратная ей, то свойства A и B эквивалентны, и такую теорему можно записать в виде $A \Leftrightarrow B$. Эта запись соответствует фразам: „Для того, чтобы A , необходимо и достаточно, чтобы B “, „ A тогда и только тогда, когда B “ или „ A , если и только если B “. Ясно, что в этих фразах A и B можно поменять местами.

Утверждение, противоположное утверждению A , записывают $\neg A$, что соответствует словам „не A “. Если в символьную запись утверждения A входят кванторы \exists , \forall и условие P , то при построении символьной записи противоположного утверждения $\neg A$ квантор \exists заменяют на \forall , квантор \forall — на \exists , а условие P заменяют на условие $\neg P$.

Пример 1.5. Рассмотрим утверждение $\exists x \in E : P$ (существует элемент x множества E , обладающий свойством P) и построим его отрицание. Если это утверждение неверно, то указанного элемента не существует, т.е. для каждого $x \in E$ свойство P не выполняется, или

$$\neg(\exists x \in E : P) = \forall x \in E : \neg P.$$

Теперь построим отрицание утверждения $\forall x \in E : P$ (для каждого элемента x множества E имеет место свойство P). Если данное утверждение неверно, то свойство P имеет место не для каждого элемента указанного множества, т.е. существует хотя бы один элемент $x \in E$, не обладающий этим свойством, или

$$\neg(\forall x \in E : P) = \exists x \in E : \neg P. \quad \#$$

Доказательство предложения представляет собой проводимое по определенным правилам рассуждение, в котором

для обоснования сформулированного предложения используют определения, аксиомы и ранее доказанные предложения. Примеры доказательств свойств *абсолютных значений действительных чисел* приведены выше (см. 1.3), а первого из соотношений свойства *дистрибутивности* операций объединения и пересечения и первого из *законов де Моргана* (1.7) — в 1.4.

Одним из используемых приемов является метод *доказательства от противного*. Для доказательства таким методом теоремы $A \Rightarrow B$ предполагают, что верно $\neg B$. Если рассуждения приводят к тому, что при таком предположении условие A невыполнимо, т.е. возникает противоречие, то теорему считают доказанной.

Пример 1.6. Используем метод доказательства от противного, чтобы убедиться в справедливости второго закона де Моргана (1.7)

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Если это равенство верно, то каждый элемент $x \in \overline{A \cap B}$ должен принадлежать и $\overline{A} \cup \overline{B}$, т.е. $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Предположим противное: $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Тогда по принципу двойственности (см. 1.4) $x \in A \cap B$, т.е. $x \notin \overline{A \cap B}$, а это противоречит исходному условию $x \in \overline{A \cap B}$, что доказывает справедливость импликации высказываний

$$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Наоборот, каждый элемент $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ должен принадлежать и $\overline{A \cap B}$, т.е. $x \in \overline{A \cap B}$. Снова предположим противное: $x \notin \overline{A \cap B}$, т.е. $x \in A \cap B$, или $(x \in A) \wedge (x \in B)$. Тогда $(x \notin \overline{A}) \wedge (x \notin \overline{B})$ и $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$, а это опять противоречит принятому условию $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, что доказывает справедливость обратной импликации высказываний

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

В итоге справедливость второй формулы (1.7) доказана полностью. #

При доказательстве предложений, справедливых для произвольного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, иногда применяют **метод математической индукции**: непосредственной проверкой устанавливают справедливость предложения для нескольких первых значений n ($n = 1, 2, \dots$), а затем предполагают, что оно верно для $n = k$, и если из этого предположения следует справедливость данного предложения для $n = k + 1$, то его считают доказанным для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пример 1.7. Докажем справедливость формулы

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (1.8)$$

для суммы первых n членов геометрической прогрессии

$$a_1, \quad a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_1 q^2, \quad \dots, \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

со знаменателем прогрессии $q \neq 1$. Ясно, что формула верна для $n = 1$ и $n = 2$. Предположим, что она верна и для $n = k$, т.е.

$$s_k = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Тогда

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q} + a_1 q^k = a_1 \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \quad (1.9)$$

Если в (1.9) обозначить $k + 1 = n$, то снова придем к (1.8), что доказывает справедливость этой формулы.

1.6. Круги Эйлера

Кругами Эйлера называют фигуры, условно изображающие множества и наглядно иллюстрирующие некоторые свойства операций над множествами. В литературе круги Эйлера

иногда называют диаграммами Венна (или диаграммами Эйлера — Венна). Круги Эйлера, иллюстрирующие основные операции над множествами, представлены на рис. 1.2 (множества, полученные в результате этих операций, отмечены штриховкой).

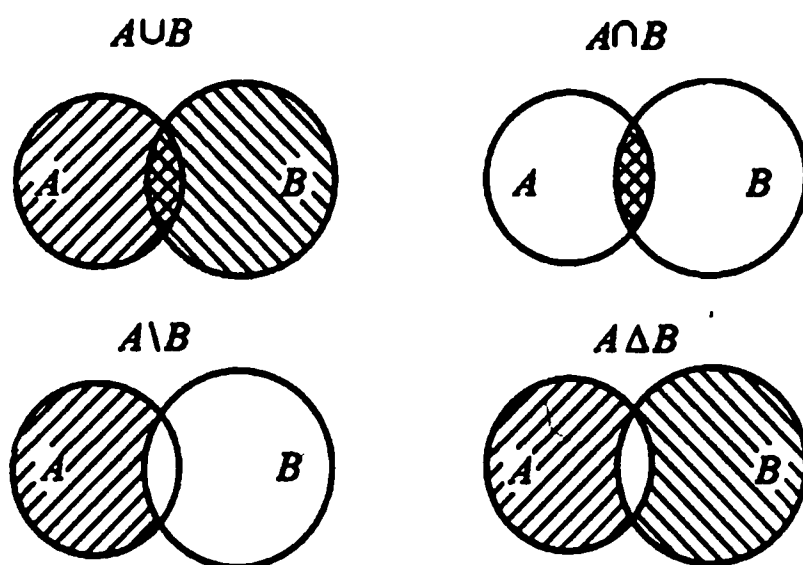


Рис. 1.2

Пример 1.8. При помощи кругов Эйлера установим сначала справедливость первого соотношения, выражающего свойство *дистрибутивности* операций *объединения* и *пересечения* множеств,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (1.10)$$

На рис. 1.3,а вертикально заштрихован круг, изображающий множество A , а горизонтально — область, отвечающая пересечению множеств B и C . В итоге тем или иным способом заштрихована область, изображающая множество $A \cup (B \cap C)$. На рис. 1.3,б вертикально заштрихована область, соответствующая объединению множеств A и B , а горизонтально — объединению множеств A и C , так что обоими способами заштрихована область, изображающая множество $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ и совпадающая с областью, заштрихованной каким-либо способом на рис. 1.3,а. Таким образом, круги Эйлера позволяют установить справедливость (1.10).

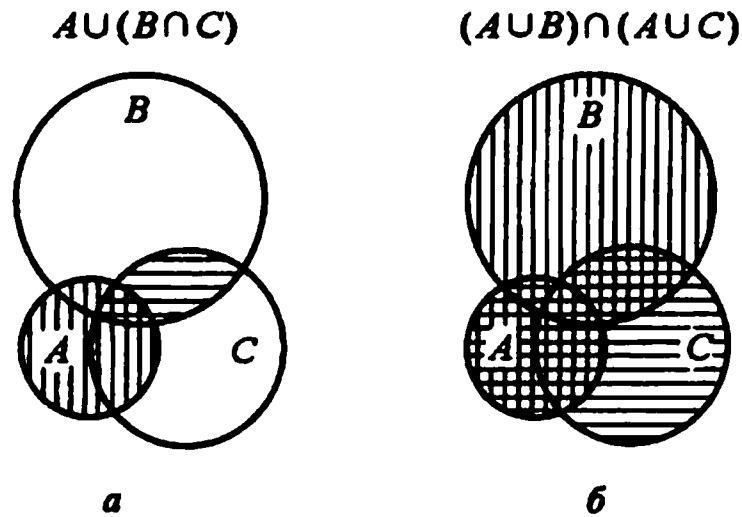


Рис. 1.3

Теперь рассмотрим второй закон де Моргана (1.7)

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \quad (1.11)$$

Заштрихованная на рис. 1.4,а область изображает множество $A \cap B$, а незаштрихованная часть прямоугольника Ω (внешняя по отношению к заштрихованной) соответствует множеству $\overline{A \cap B}$. На рис. 1.4,б части прямоугольника Ω , заштрихованные вертикально и горизонтально, отвечают соответственно \overline{A} и \overline{B} . Тогда множеству $\overline{A \cap B}$ отвечает область, заштрихованная хотя бы одним из указанных способов. Она совпадает с областью, не заштрихованной на рис. 1.4,а и отвечающей множеству $\overline{A \cap B}$, что устанавливает справедливость (1.11).

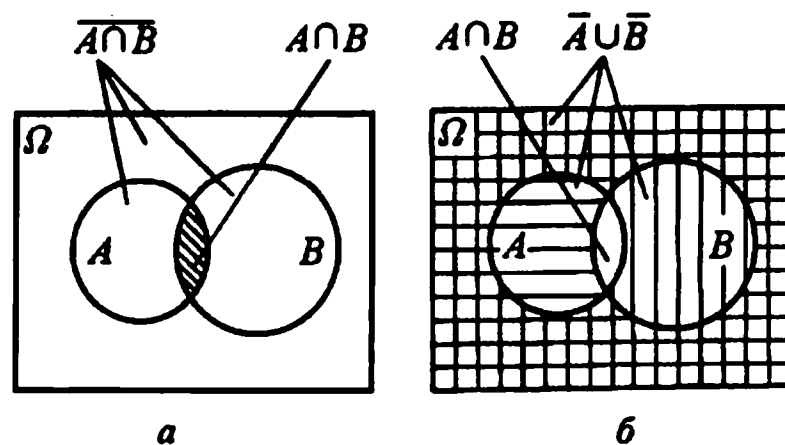


Рис. 1.4

Вопросы и задачи

1.1. Запись $m|n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, означает, что число m нацело делит число n (m – делитель n). Описать заданные множества при условии, что $x \in \mathbb{N}$:

- а) $\{x: x|12\} \cap \{x: x|8\}$; б) $\{x: x|12\} \cup \{x: x|8\}$;
 в) $\{x: 12|x\} \cap \{x: 8|x\}$; г) $\{x: 12|x\} \cup \{x: 8|x\}$.

1.2. Доказать следующие соотношения и проиллюстрировать их кругами Эйлера:

- а) $\overline{A \setminus B} \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \overline{A}$;
 б) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$;
 в) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = A \Delta B$;
 г) $A \setminus B \subset C \Leftrightarrow A \subset B \cup C$;
 д) $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$;
 е) $A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$;
 ж) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
 з) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
 и) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$;
 к) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$;
 л) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
 м) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.3. Установить, в каком отношении ($X \subset Y$, $X \supset Y$ или $X = Y$) находятся множества X и Y , если:

- а) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;
 б) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
 в) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Использовать для иллюстрации круги Эйлера.

1.4. Пусть A_i – множество точек, образующих стороны некоторого треугольника, вписанного в заданную окружность. Описать объединение и пересечение всех таких множеств, если треугольники: а) произвольные; б) правильные; в) прямоугольные.

1.5. Найти

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \quad \text{и} \quad \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$$

для заданных семейств множеств:

- а) $A_j = \{x \in \mathbb{Z}: -j < x < j\}$; б) $A_j = \{3j - 2, 3j - 1\}$;
 в) $A_j = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/j\}$.

1.6. Указать, какие из представленных ниже соотношений неверны, и объяснить, почему:

- а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$; б) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
 в) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$; г) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$;
 д) $3 \in \{1, \{2, 3\}, 4\}$; е) $x \in \{3, \cos x\}$; ж) $x \in \{1, b, x\}$.

1.7. Указать, какие из множеств равны между собой:

- а) $\{2, 5, 4\}$; б) $\{1, \{5, 2\}, 6\}$; в) $\{1, 5, 2, 6\}$;
 г) $\{1, \{2, 5\}, 6\}$; д) $\{5, 4, 2\}$; е) $\{1, \{2, 5, 6\}\}$.

1.8. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и изобразить их на числовой прямой, если $A = (-1, 2]$ и $B = [1, 4)$.

1.9. Считая отрезок $[0, 1]$ универсальным множеством, найти и изобразить на числовой прямой дополнения множеств:

- а) $\{0, 1\}$; б) $(1/4, 1/2)$; в) $(0, 1/2]$; г) $\{0\} \cup [3/4, 1)$.

1.10. По приведенным ниже описаниям множеств людей подберите для каждой записи высказывания на языке множеств подходящую пословицу или поговорку. Надеемся, что это позволит лишний раз проанализировать смысл народных изречений. Например, если Z — множество людей, которые сами как следует не знают того, о чем говорят, то запись $x \in Z$ можно отнести к пословице „Слышал звон, да не знает, где он“, поскольку именно так говорят о человеке, наделенном указанным свойством (в данном случае — характеристическим свойством множества Z , см. 1.1).

Множества людей

Ω — универсальное множество всех людей,
 A — добрые,

- B* – незаурядные, с большими способностями,
C – глупые,
D – умные,
E – поступающие по своему, не слушающие советов,
F – связанные корыстными отношениями,
G – много обещающие,
H – не выполняющие своих обещаний,
J – злоупотребляющие своим служебным положением,
K – слишком важничающие, задающиеся,
L – вмешивающиеся не в свое дело,
M – предприимчивые, ловкие, умеющие устроиваться,
P – берущиеся за несколько дел сразу,
Q – плодотворно работающие,
S – ошибающиеся,
T – чувствующие вину и возможность расплаты,
U – не добивающиеся результатов,
V – выдающие себя своим поведением,
W – недальновидные,
X – действующие заодно, не предающие друг друга,
Y – бывалые, опытные люди.

Запись высказываний на языке множеств

$$\begin{aligned}x \in K; \quad A \neq \emptyset; \quad x \in G \cap H; \quad x \in B \cap Q; \quad x \in J \cap U; \\x \in J; \quad x \in M; \quad x \in C \cap E; \quad x \in T \cap V; \quad x \in P \cap U; \\x \in E; \quad x \in F \cap X; \quad x \in Y \cap S; \quad x \in D \cap W.\end{aligned}$$

Пословицы и поговорки

- Бодливой корове бог рог не дает.
- Большому кораблю — большое плавание.
- Вольному воля.
- Ворон ворону глаз не выклюет.
- Дуракам закон не писан.
- За двумя зайцами погонишься, ни одного не поймаешь.
- Знает кошка, чье мясо съела.
- Знай сверчок свой шесток.
- И на старуху бывает проруха.
- Курице не тетка, свинье не сестра.

- Кто смел, тот и съел.
- На всякого мудреца довольно простоты.
- Наделала синица славы, а море не зажгла.
- Свет не без добрых людей.

1.11. Доказать справедливость соотношений (1.2).

1.12. Доказать справедливость второго из соотношений свойства дистрибутивности операций объединения и пересечения непосредственно и методом от противного.

1.13. Применив метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы неравенства $n \leq 2^{n-1}$ и $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall x > -1$ (неравенство Бернулли).

1.14. Доказать, что среднее арифметическое n положительных действительных чисел не меньше их среднего геометрического, т.е.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}.$$

1.15. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что это был синий „Бьюик“, Джонс — голубой „Крайслер“, а Смит — „Форд Мустанг“, но не синий. Какого цвета был автомобиль и какой марки, если известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет?

1.16. Для полярной экспедиции из восьми претендентов A , B , C , D , E , F , G и H надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять E и G , гидролога — B и F , синоптика — F и G , радиста — C и D , механика — C и H , врача — A и D , но каждый из них, если будет в экспедиции, сможет выполнять лишь одну обязанность. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не может ехать без B , D — без H и без C , C не может ехать с G , а A — с B ?

2. ОТОБРАЖЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ФУНКЦИИ

2.1. Понятия отображения и функции

Пусть заданы два множества X и Y .

Определение 2.1. *Отображением f множества X в множество Y , или функцией, определенной на множестве X со значениями в множестве Y , называют соответствие, которое каждому элементу $x \in X$ соотносит некоторый единственный элемент $y \in Y$.*

Множество X называют *областью определения функции f* и обозначают $D(f)$, элемент $x \in X$ — *аргументом функции*, а элемент $y \in Y$ — *зависимым переменным*. При этом элемент $y \in Y$, соответствующий элементу $x \in X$, именуется *образом элемента x при отображении f или значением функции f в точке x* и обозначают $f(x)$. *Областью значений функции f (или образом множества X при отображении f)* называют множество

$$f(X) = \{y \in Y: y = f(x) \ \forall x \in X\},$$

обозначаемое $R(f)$. Множество $X = D(f)$ является *прообразом множества $f(X) = R(f)$ при отображении f* . При заданном элементе $y \in Y$ совокупность всех таких элементов $x \in X$, что $f(x) = y$, называют *прообразом элемента y* и обозначают $f^{-1}(y)$, т.е.

$$f^{-1}(y) = \{x \in X: f(x) = y\}.$$

Факту задания отображения (или функции) соответствует запись $f: X \rightarrow Y$, или $f: x \rightarrow y$, или просто $y = f(x)$. Таким

образом,

$$f: X \rightarrow Y : \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \exists! y \in Y : y = f(x).$$

Часто функцию f обозначают $f(x)$. Обозначение функции и ее значения в точке $x \in X$ одним и тем же символом $f(x)$ обычно не вызывает недоразумений, поскольку в каждом конкретном случае, как правило, ясно, что имеют в виду. Обозначение $f(x)$ часто удобнее, чем $f: x \rightarrow y$. Например, при аналитических преобразованиях запись $f(x) = x^2$ удобнее по сравнению с $f: x \rightarrow x^2$. Чтобы отличать обозначение конкретного значения $f(x)$ функции при конкретном значении ее аргумента x от обозначения самой функции, в последнем случае иногда пишут $f(x)$, $x \in X$.

Итак, понятие функции состоит из трех неотъемлемых частей: 1) области определения X ; 2) множества Y , содержащего значения функции; 3) правила f , которое для каждого элемента $x \in X$ задает единственный элемент $y = f(x) \in Y$.

На множества X и Y определение 2.1 не накладывает никаких ограничений. В зависимости от того, какими являются эти множества, получим тот или иной класс функций. Так, если $Y \subseteq \mathbb{R}$, то $f(x)$ называют *действительной* (или *скалярной*) *функцией*, а если $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, то $f(x)$ называют *векторной функцией*. Когда область определения X функции $f(x)$ есть множество \mathbb{R} или некоторое его *подмножество*, $f(x)$ именуют *функцией действительного* (или *вещественного*) *переменного*. Когда и $X \subseteq \mathbb{R}$, и $Y \subseteq \mathbb{R}$, $f(x)$ называют *действительной функцией действительного переменного*. Если областью определения функции является множество *натуральных чисел* $N = \{1, 2, \dots\}$, то ее называют *последовательностью элементов множества* Y и обозначают $\{f_n\}$ или $\{y_n\}$, имея в виду, что $y_n = f_n = f(n) \in Y$ при $n \in N$, а при $Y \subseteq \mathbb{R}$ — *числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*).

Подмножество

$$S = \{y \in Y: y = f(x) \ \forall x \in A\} = f(A) \subset Y$$

является **образом подмножества** $A \subset X$ при отображении $f: X \rightarrow Y$. Для образов подмножеств $A \subset X$ и $B \subset X$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B), \\ f(A \setminus B) &\supset f(A) \setminus f(B), \end{aligned}$$

а в случае $A \subset B$

$$f(A) \subset f(B). \quad (2.1)$$

Подмножество

$$A = \{x \in X: f(x) \in S\} = f^{-1}(S) \subset X$$

будет **прообразом подмножества** $S \subset Y$ при отображении $f: X \rightarrow Y$.

Итак, прообраз множества S состоит из всех тех элементов $x \in X$, которые функция f отображает в элементы из S , или, что то же самое, прообраз множества S состоит из всех прообразов элементов $y \in S$, т.е.

$$f^{-1}(S) = \bigcup_{y \in S} f^{-1}(y).$$

Для прообразов множеств $S \subset Y$ и $T \subset Y$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f^{-1}(S \cup T) &= f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T), \\ f^{-1}(S \cap T) &= f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T), \\ f^{-1}(S \setminus T) &= f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T), \end{aligned} \quad (2.2)$$

и при условии $S \subset T$

$$f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T). \quad (2.3)$$

В случае $A \subset X$ отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает отображение $f_A: A \rightarrow Y$, определяемое формулой $f_A(x) = f(x)$ для $x \in A$. Это отображение называют **сужением отображения (функции) f** на множество A . Говорят также, что f является **продолжением отображения (функции) f_A** множества A в множество Y на множество X , но обычно продолжают писать f вместо f_A .

2.2. Сюръекция, инъекция и биекция

Правило, задающее отображение $f: X \rightarrow Y$ (или функцию f), можно условно изобразить стрелками (рис. 2.1). Если в множестве Y есть хотя бы один элемент, на который не указывает ни одна из стрелок, то это свидетельствует о том, что область значений функции f не заполняет все множество Y , т.е. $f(X) \subset Y$. Если же область значений f совпадает с Y , т.е. $f(X) = Y$, то такую функцию называют **сюръективной**, или короче — **сюръекцией**, и говорят, что функция f отображает множество X на множество Y (в отличие от общего случая отображения множества X в множество Y согласно определению 2.1).

Итак, $f: X \rightarrow Y$ есть сюръекция, если $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$. На рисунке в таком случае к каждому элементу множества Y ведет хотя бы одна стрелка (рис. 2.2). При этом к некоторым элементам из Y могут вести несколько стрелок.

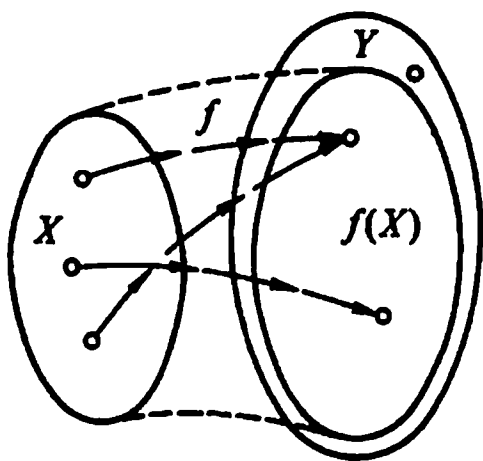


Рис. 2.1

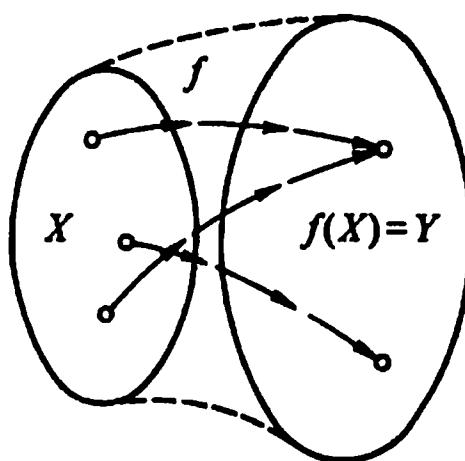


Рис. 2.2

Если к любому элементу $y \in Y$ ведет не более одной стрелки, то f называют **инъективной функцией**, или **инъекцией**. Эта функция не обязательно сюръективна, т.е. стрелки ведут не ко всем элементам множества Y (рис. 2.3). Итак, функция $f: X \rightarrow Y$ представляет собой инъекцию, если два любых различных элемента из X имеют своими образами при отображении f два различных элемента из Y , или $\forall y \in f(X) \subseteq Y \exists! x \in X: f(x) = y$.

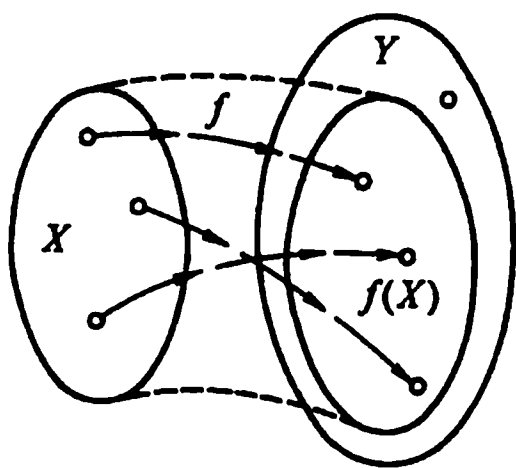


Рис. 2.3

Отображение $f: X \rightarrow Y$ именуют **биективным**, или **биекцией**, если каждый элемент $y \in Y$ является образом некоторого и притом единственного элемента из X , т.е. $\forall y \in f(X) = Y \exists! x \in X: f(x) = y$. По сути, функция f в этом случае устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y , и потому ее часто называют

взаимно однозначной функцией.

Очевидно, что функция f биективна тогда и только тогда, когда она одновременно инъективна и сюръективна. В этом случае стрелки (рис. 2.4) соединяют попарно каждый элемент из X с каждым элементом из Y . При этом никакие два элемента из X не могут быть соединены стрелкой с одним и тем же элементом из Y , ибо f инъективна, и никакие два элемента из Y не могут быть соединены стрелками с одним и тем же элементом из X из-за требования единственности образа в определении 2.1 отображения. Каждый элемент из X участвует в попарном соединении, поскольку X — область определения функции f . Наконец, каждый элемент из Y тоже участвует в одной из пар, ибо f сюръективна. Роли X и Y в этом случае как бы совершенно одинаковы, и если повернуть все стрелки вспять (рис. 2.5), то получим иное отображение

$g: Y \rightarrow X$ (или иную функцию g), которое тоже и инъективно, и сюръективно.

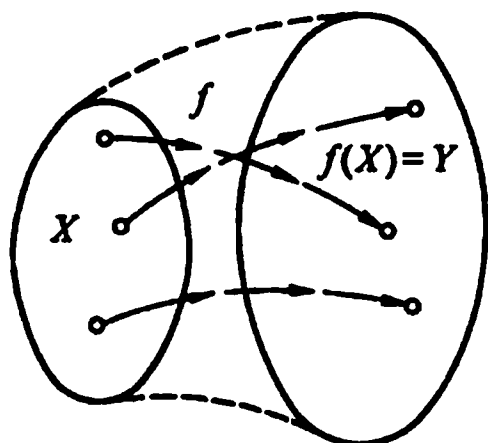


Рис. 2.4

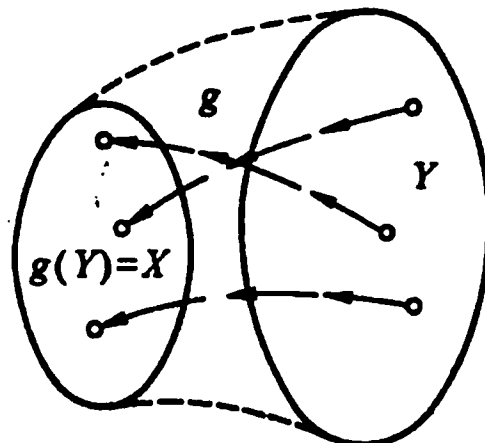


Рис. 2.5

Отображения (функции), допускающие такое обращение, будут играть большую роль в дальнейшем. В частном случае множества X и Y могут совпадать ($X = Y$). Тогда биективная функция будет осуществлять **отображение множества X на себя**. Биекцию множества на себя называют также **преобразованием**.

2.3. Обратное отображение

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — некоторая биекция и пусть $y \in Y$. Обозначим через $f^{-1}(y)$ единственный элемент $x \in X$, такой, что $f(x) = y$. Тем самым мы определим некоторое **отображение $g: Y \rightarrow X$** , которое является снова биекцией. Ее называют **обратным отображением**, или **обратной биекцией к f** . Часто ее также называют просто **обратной функцией** и обозначают f^{-1} . На рис. 2.5 функция g как раз и является обратной к f , т.е. $g = f^{-1}$. Отображения (функции) f и f^{-1} являются **взаимно обратными**.

Ясно, что если функция не является биекцией, то обратной к ней функции не существует. Действительно, если f не **инъективна**, то некоторому элементу $y \in Y$ могут соответствовать несколько элементов x из множества X , что противоречит

определению функции. Если же f не сюръективна, то в Y найдутся элементы, для которых в X нет прообразов, т.е. для этих элементов обратная функция не определена.

Пример 2.1. а. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Функция f , определяемая формулой $y = 3x - 2$, $x, y \in \mathbb{R}$, является биекцией. Обратной функцией будет $x = (y + 2)/3$.

б. Действительная функция $f(x) = x^2$ действительного переменного x не является сюръективной, поскольку отрицательные числа из $Y = \mathbb{R}$ не являются образами элементов из $X = \mathbb{R}$ при $f: X \rightarrow Y$.

Пример 2.2. Пусть $X = \mathbb{R}$, а $Y = \mathbb{R}_+$ — множество положительных действительных чисел. Функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, является биекцией. Обратной функцией будет $f^{-1}(y) = \log_a y$.

2.4. Композиция отображений

Если $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, то отображение $\varphi: X \rightarrow Z$, задан-

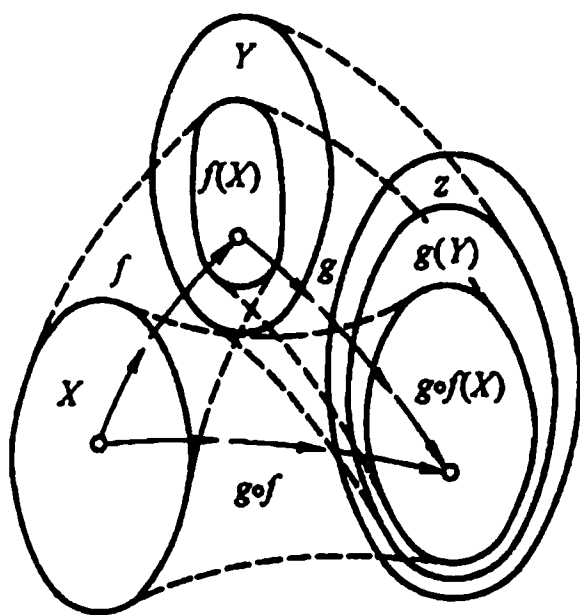


Рис. 2.6

ное для каждого $x \in X$ формулой $\varphi(x) = g(f(x))$, именуют **композицией (суперпозицией) отображений (функций) f и g** , или **сложной функцией**, и обозначают $g \circ f$ (рис. 2.6). Таким образом, сложная функция $g \circ f$ реализует правило: „Применяй сначала f , а затем g “, т.е. в композиции операций $g \circ f$ надо начинать с операции f , расположенной справа.

Отметим, что композиция отображений ассоциативна, т.е.

если $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ и $h: Z \rightarrow H$, то тогда $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, что проще записывают в виде $h \circ g \circ f$. Проверим это следующим образом:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

На любом множестве X определено отображение $I_X: X \rightarrow X$, называемое *тождественным*, обозначаемое часто также id_X и задаваемое формулой $I_X(x) = x \quad \forall x \in X$. Его действие состоит в том, что оно оставляет все на своих местах. Так, если f^{-1} является биекцией, обратной к биекции $f: X \rightarrow Y$, то $f^{-1} \circ f = I_X$, а $f \circ f^{-1} = I_Y$, где I_X и I_Y — тождественные отображения множеств X и Y соответственно. Обратно, если отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ таковы, что $g \circ f = I_X$ и $f \circ g = I_Y$, то функция f является биекцией, а g — ее обратной биекцией. Очевидно, что если f — биекция X на Y , а g — биекция Y на Z , то $g \circ f$ является биекцией X на Z , а $f^{-1} \circ g^{-1}$ будет по отношению к ней обратной биекцией.

2.5. Произведение множеств. График отображения

Напомним, что две взаимно перпендикулярные координатные оси с масштабom, одинаковым для обеих осей, задают на плоскости *прямоугольную декартову систему координат* (рис. 2.7). Точку O пересечения координатных осей называют *началом координат*.

Каждой точке M можно поставить в соответствие пару (x, y) действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$, где x — координата точки M_x на ко-

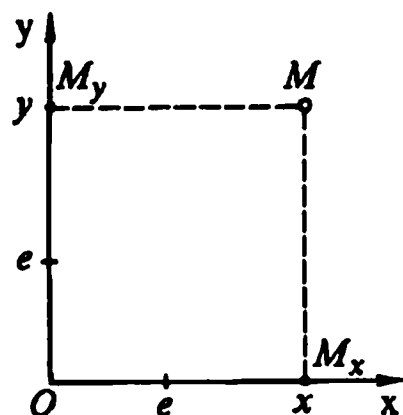


Рис. 2.7

ординатной оси Ox , а y — координата точки M_y на координатной оси Oy . Точки M_x и M_y являются основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M соответственно на оси Ox и Oy . Числа x и y называют **координатами точки M** (в выбранной системе координат), причем x называют **абсциссой точки M** , а y — **ординатой этой точки**.

Очевидно, что каждой паре (a, b) действительных чисел $a, b \in \mathbf{R}$ соответствует на плоскости точка M , имеющая эти числа своими координатами. И обратно, каждой точке M плоскости соответствует пара (a, b) действительных чисел a и b . В общем случае пары (a, b) и (b, a) определяют разные точки, т.е. существенно, какое из двух чисел a и b стоит в обозначении пары на первом месте. Таким образом, речь идет об **упорядоченной паре**. В связи с этим пары (a, b) и (b, a) считают равными между собой, и они определяют одну и ту же точку на плоскости, если только $a = b$.

Множество всех пар действительных чисел, а также множество точек плоскости обозначают \mathbf{R}^2 . Это обозначение связано с важным в теории множеств понятием **прямого (или декартова) произведения множеств** (часто говорят просто о произведении множеств).

Определение 2.2. **Произведением множеств A и B** называют множество $A \times B$ возможных упорядоченных пар (x, y) , где первый элемент взят из A , а второй — из B , так что

$$A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}.$$

Равенство двух пар (x, y) и (x', y') определяют условиями $x = x'$ и $y = y'$. Пары (x, y) и (y, x) считают различными, если $x \neq y$. Это особенно важно иметь в виду, когда множества A и B совпадают. Поэтому в общем случае $A \times B \neq B \times A$, т.е. произведение произвольных множеств не **коммутативно**, но оно **дистрибутивно** по отношению к **объединению**, **пересечению** и **разности** множеств:

$$A \times (B \sqcup C) = (A \times B) \sqcup (A \times C),$$

где \square обозначает одну из трех названных операций.

Произведение множеств существенно отличается от указанных операций над двумя множествами. Результатом выполнения этих операций является множество, элементы которого (если оно не *пустое*) принадлежат одному или обоим исходным множествам. Элементы же произведения множеств принадлежат новому множеству и представляют собой объекты иного рода по сравнению с элементами исходных множеств.

Аналогично определению 2.2 можно ввести понятие произведения более чем двух множеств. Множества $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$ отождествляют и обозначают просто $A \times B \times C$, так что

$$A \times B \times C = \{(x, y, z): x \in A, y \in B, z \in C\}.$$

Произведения $A \times A$, $A \times A \times A$ и т.д. обозначают, как правило, через A^2 , A^3 и т.д. Очевидно, плоскость \mathbb{R}^2 можно рассматривать как произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ двух экземпляров множества действительных чисел (отсюда и происходит обозначение множества точек плоскости как произведения двух множеств точек числовой прямой). Множеству точек геометрического (трехмерного) пространства соответствует произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ трех экземпляров множества точек числовой прямой, обозначаемое \mathbb{R}^3 . Произведение n множеств действительных чисел обозначают \mathbb{R}^n . Это множество представляет собой всевозможные наборы (x_1, x_2, \dots, x_n) из n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, а любая точка x^* из \mathbb{R}^n есть такой набор $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ действительных чисел $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in \mathbb{R}$. Произведение n произвольных множеств есть множество упорядоченных наборов из n (в общем случае разнородных) элементов. Для таких наборов употребляют названия *кортеж* или *n-ка* (произносят „энка“).

Пример 2.3. Пусть $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2\}$. Тогда

$$A \times B = B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\},$$

и множество $A \times B$ можно отождествить с четырьмя точками плоскости \mathbf{R}^2 , координаты которых указаны при перечислении элементов этого множества.

Если $C = \{1, 2\}$ и $D = \{3, 4\}$, то

$$\begin{aligned} C \times D &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}, \\ D \times C &= \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}. \end{aligned}$$

Пример 2.4. Пусть

$$E = \{x: 1 \leq x \leq 2\} \quad \text{и} \quad F = \{x: 3 \leq x \leq 4\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E \times F &= \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\} \subset \mathbf{R}^2, \\ F \times E &= \{(x, y): 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\} \subset \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация множеств $E \times F$ и $F \times E$ представлена на рис. 2.8. #

Для отображения $f: X \rightarrow Y$ можно составить множество

$$\Gamma = \{(x, y): x \in X, y \in Y, y = f(x)\} \subseteq X \times Y$$

упорядоченных пар (x, y) , которое является *подмножеством* прямого произведения $X \times Y$. Такое множество Γ называют *графиком отображения f* (или *графиком функции $f(x)$*).

Пример 2.5. В случае $X \subseteq \mathbf{R}$ и $Y = \mathbf{R}$ каждая упорядоченная пара задает координаты точки на плоскости \mathbf{R}^2 . Если при этом X является *промежутком числовой прямой \mathbf{R}* , то график функции может представлять некоторую линию (рис. 2.9).

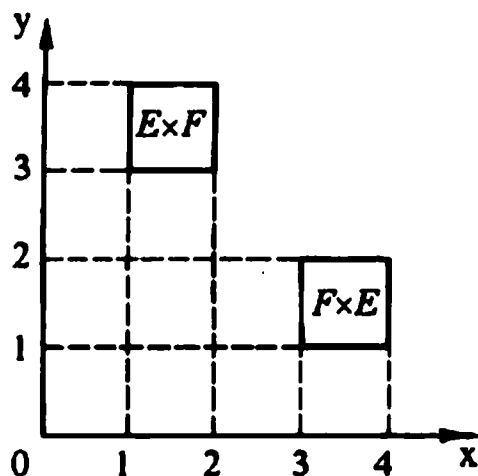


Рис. 2.8

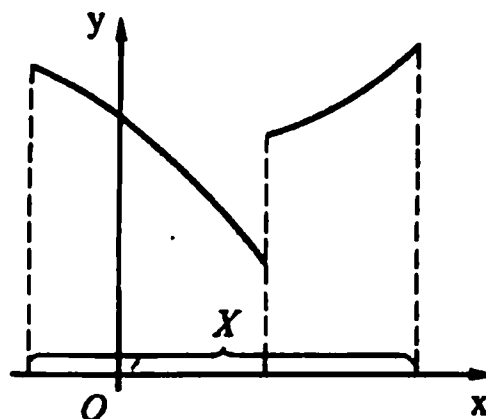


Рис. 2.9

Пример 2.6. Ясно, что при $X \subseteq \mathbb{R}^2$ и $Y = \mathbb{R}$ график функции есть некоторое множество точек в \mathbb{R}^3 , которое может представлять некоторую поверхность (рис. 2.10). Если же $X \subseteq \mathbb{R}$, а $Y = \mathbb{R}^2$, то график функции также есть множество точек в \mathbb{R}^3 , которое может представлять некоторую линию, пересекаемую плоскостью $x = \text{const}$ лишь в одной точке M с тремя координатами x, y_1, y_2 (рис. 2.11). #

Все упомянутые примеры графиков функции являются важнейшими объектами математического анализа, и в дальнейшем они будут подробно рассмотрены.

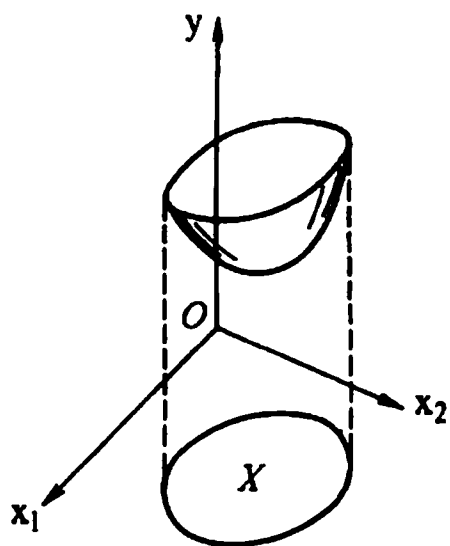


Рис. 2.10

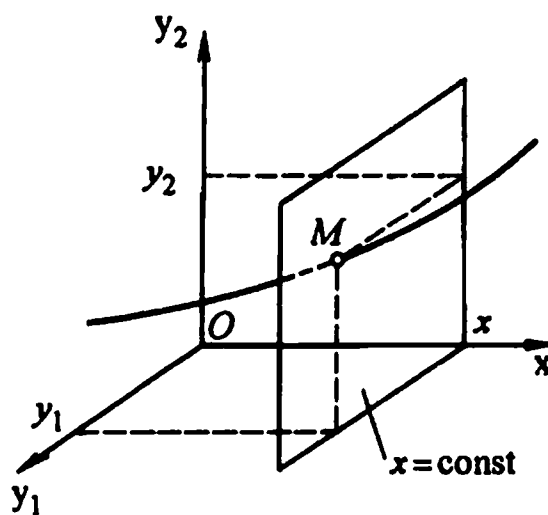


Рис. 2.11

2.6. Упорядоченные множества.

Элементы комбинаторики

Определение 2.3. На множестве E введено отношение **порядка**, если для некоторых пар x, y элементов этого множества указано, какой из элементов за каким следует.

Запись $x \succ y$ означает, что x следует за y . Отношение порядка обладает свойствами:

- 1) $x \succ x$;
- 2) если $x \succ y$ и $y \succ z$, то $x \succ z$;
- 3) если $x \succ y$ и $y \succ x$, то $x = y$.

Множество, на котором введено отношение порядка, называют **частично упорядоченным**. Если для любых двух элементов x, y множества E имеет место либо $x \succ y$, либо $y \succ x$, либо $x = y$, то это множество называют **упорядоченным**. Иногда говорят: множество упорядочено (частично упорядочено) данным отношением порядка.

Пример 2.7. а. В множестве \mathbb{R} действительных чисел полагаем $x \succ y$, если $x \geq y$. Указанное отношение является отношением порядка, и в силу свойства упорядоченности действительных чисел его называют **естественным**. В дальнейшем, говоря об упорядоченности любого подмножества $E \subseteq \mathbb{R}$, будем иметь в виду естественное отношение порядка. Так, множество значений температуры на шкале термометра упорядочено естественным отношением порядка.

б. В множестве $P(E)$ всех подмножеств множества E существует естественное отношение порядка $X \succ Y$, если $X \supseteq Y$. Множество $P(E)$ будет частично упорядоченным.

в. Рассмотрим множество F действительных функций, определенных на некотором множестве E . Примем, что для $f, g \in F$ $f \succ g$, если справедливо неравенство $f(x) \geq g(x) \forall x \in E$. Множество F будет, по крайней мере, частично упорядоченным.

г. Простейший пример упорядоченного множества — *упорядоченная пара* (a, b) . По аналогии с ней можно говорить об упорядоченной тройке (a, b, c) , упорядоченной n -ке (см. 2.5). #

Конечные упорядоченные множества обычно задают перечислением элементов, располагая их в соответствии с введенным отношением порядка и заключая в круглые скобки. Например, запись $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$ показывает, что A и B — различные упорядоченные множества, хотя они и содержат одни и те же элементы; в A отношение порядка $x \succ y$ введено по условию $x \geq y$, а в B — по условию $x \leq y$. Из A и B можно образовать по три упорядоченных подмножества: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$ и $(3, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$. Нахождение количества различных упорядоченных подмножеств, которые можно образовать выборкой по определенным правилам элементов из некоторого множества, составляет одну из задач **комбинаторики**.

Пусть задано множество из n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, содержащее k элементов, называют **размещением** из n элементов по k элементов. Число всех таких размещений обозначают A_n^k по первой букве французского (и английского) слова *arrangement*, означающего размещение, приведение в порядок. Первый элемент размещения можно выбрать из n элементов заданного множества n способами. Поскольку элементы размещения не должны повторяться, для выбора второго элемента можно использовать лишь $n - 1$ способов и так далее вплоть до k -го элемента размещения, который можно выбрать $n - k + 1$ способами. В итоге, используя символ произведения \prod , получаем

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \prod_{m=1}^k (n-m+1), \quad k \leq n. \quad (2.4)$$

В случае $k = n$ каждое упорядоченное подмножество заданного множества называют **перестановкой** из n элемен-

тов. Число всех таких перестановок обозначают P_n по первой букве французского (и английского) слова *permutation* — перестановка. Ясно, что каждая из перестановок исходного множества упорядочена своим отношением порядка. Поскольку перестановка элементов *конечного множества* является частным случаем (при $k = n$) размещения его элементов, согласно (2.4) число возможных перестановок из n элементов есть произведение всех *натуральных чисел* от 1 до n включительно, обозначаемое $n!$ (произносят „эн факториал“). Таким образом,

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n = n! = \prod_{m=1}^n m. \quad (2.5)$$

Тогда вместо (2.4) можно написать

$$A_n = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad (2.6)$$

причем (2.6) переходит при $n = k$ в (2.5), если условно считать, что $0! = 1$.

Каждое подмножество множества из n элементов, содержащее k элементов, называют *сочетанием* из n элементов по k элементов. Если в каждом сочетании выполнить всевозможные перестановки его элементов (число таких перестановок по k элементов $P_k = k!$), то получим размещения из n элементов по k . Поэтому

$$A_n^k = C_n^k P_k,$$

где C_n^k — число всех сочетаний из n элементов по k (обозначение по первой букве французского слова *combinaison* или английского слова *combination* — сочетание). Отсюда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n+1}^{k+1}$. Первое из этих равенств очевидно, так как каждому сочетанию из

n элементов конечного множества, содержащему k элементов, соответствует сочетание, содержащее $n - k$ остальных элементов этого множества.

Второе равенство можно истолковать так. Зафиксируем некоторый из $n + 1$ элементов, из которых составляются сочетания по $k + 1$ элементов. Тогда любое сочетание, в которое входит этот элемент, соответствует некоторому сочетанию из оставшихся n элементов по k элементов. Поэтому число всевозможных сочетаний, в которые вошел этот элемент, равно C_n^k . Сочетания, в которые не входит зафиксированный элемент, образуют всевозможные сочетания по $k + 1$ элементов из оставшихся n элементов. Так как зафиксированный элемент либо входит в сочетание, либо не входит, то общее число сочетаний C_{n+1}^{k+1} получается как сумма всевозможных сочетаний, содержащих этот элемент и не содержащих его.

Числа C_n^k составляют таблицу, называемую *треугольником Паскаля*, симметричную относительно вертикали, проходящей через его вершину.

				1				
				1		1		
			1		2		1	
		1		3		3		1
	1		4		6		4	1
	1					C_n^k	C_n^{k+1}	
								1
1						C_{n+1}^{k+1}		
								1

На k -м месте в любой n -й строке таблицы стоит значение C_n^k , причем крайние числа отвечают значениям $C_n^0 = C_n^n = 1$. Начиная с третьей строки любой внутренний элемент таблицы равен сумме двух ближайших к нему элементов предшествующей строки.

Пример 2.8. Поставим в соответствие каждому элементу числового множества $\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ двучлены (иначе **биномы**) вида $1 + a_i x$, $i = \overline{1, n}$ (i принимает последовательно все значения из множества \mathbb{N} натуральных чисел от 1 до n включительно) и перемножим их:

$$\begin{aligned} (1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \cdots (1 + a_i x) \cdots (1 + a_n x) = \\ = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k + \dots + b_n x^n. \end{aligned}$$

Любой из коэффициентов b_k , $k = \overline{1, n}$ при k -й степени числа x есть сумма произведений по k элементов из n элементов заданного множества, причем в эту сумму входит C_n^k слагаемых. В случае $a_1 = a_2 = \dots = a_i = \dots = a_n = 1$ имеем $b_k = C_n^k$ и

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (2.8)$$

Это выражение называют **биномом Ньютона**, в котором числа C_n^k являются **биномиальными коэффициентами**. Используя символ суммы \sum и принятое выше соглашение, что $0! = 1$, вместо (2.8) можем написать

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k. \quad (2.9)$$

Пример 2.9. Рассмотрим конечное множество из $2m$ элементов. Из них, согласно (2.4) и (2.7), можно составить $A_{2m}^2 = 2m(2m - 1)$ упорядоченных пар и

$$C_{2m}^2 = \frac{(2m)!}{2!(2m - 2)!} = m(2m - 1)$$

пар, для которых порядок расположения элементов несуществен (например, C_{2m}^2 — это число встреч $2m$ участников спортивного соревнования, проводимого по круговой системе).

Найдем число R_{2m} способов, которыми $2m$ элементов можно разбить на пары. С участием любого элемента пару можно образовать $2m - 1$ способами. Каждый раз после образования одной пары останется $2m - 2$ элементов, которые можно разбить на пары R_{2m-2} способами, т.е.

$$R_{2m} = (2m - 1)R_{2m-2}.$$

Такого рода соотношение называют **рекуррентным**. В данном случае оно позволяет последовательно выразить R_{2m} через число способов разбиения на пары $2m - 2$, $2m - 4$, ... элементов, пока не останутся лишь 2 элемента, которые образуют пару единственным способом ($R_2 = 1$). Таким образом,

$$\begin{aligned} R_{2m} &= (2m - 1)R_{2m-2} = (2m - 1)(2m - 3)R_{2m-4} = \dots = \\ &= (2m - 1)(2m - 3) \cdots R_2 = (2m - 1)(2m - 3) \cdots 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих с n одинаковую четность, обозначают $n!!$ (произносят: „эн два факториала“ или „эн двойной факториал“). С учетом этого обозначения число разбиений на пары $2m$ элементов $R_{2m} = (2m - 1)!!$.

2.7. Ограниченные множества

Определение 2.4. Подмножество A упорядоченного множества E называют **ограниченным сверху**, если существует по крайней мере один элемент из E , следующий за всеми элементами из A .

Каждый элемент $b \in E$, ограничивающий подмножество $A \subseteq E$ сверху, называют **мажорантой** для A (или **верхней границей** A). Подмножество $A \subseteq E$ имеет наибольшее значение, если существует мажоранта b , принадлежащая этому подмножеству.

Аналогично определяют *ограниченное снизу* подмножество $A \subseteq E$, *миноранту* для A (или *нижнюю границу* A), наименьшее значение A .

Определение 2.5. Подмножество A упорядоченного множества E , ограниченное сверху и снизу, называют **ограниченным**.

На *числовой прямой* множество $A \subset \mathbb{R}$ будет ограниченным снизу, если существует такое число z из \mathbb{R} , что z не больше x для любого x из A , т.е.

$$\exists z \in \mathbb{R}: \forall x \in A \quad z \leq x.$$

Любое число z из \mathbb{R} , обладающее по отношению к множеству A указанным свойством, является нижней границей A . Если A ограничено сверху, т.е. если

$$\exists y \in \mathbb{R}: \forall x \in A \quad y \geq x,$$

то множество $B = \{-x: x \in A\}$ ограничено снизу, поскольку из $x \leq y$ следует $-x \geq -y$, при этом $-y$ будет нижней границей B . Обратно, если A ограничено снизу, то по тем же соображениям B ограничено сверху, и если z — нижняя граница A , то $-z$ — верхняя граница B . Примерами ограниченных подмножеств на числовой прямой служат *отрезки, интервалы и полуинтервалы*.

Множество не обязательно имеет наибольшее или наименьшее значение. Если же множество имеет, например, наибольшее значение, то это значение единственно. В самом деле, если b_1 и b_2 — два наибольших значения одного множества A , то одновременно $b_1 \succ b_2$ и $b_2 \succ b_1$, откуда по свойству *отношения порядка* $b_1 = b_2$.

Если множество мажорант множества $A \subseteq E$ имеет наименьшее значение, то это значение называют *точной верхней гранью* множества A и обозначают $\sup A$ или $\sup_{x \in A} x$ (произносят „супремум“). Ясно, что точная верхняя грань множества

является наименьшей из мажорант этого множества. Множество не обязательно имеет точную верхнюю грань, но если оно ее имеет, то эта грань единственна. Если точная верхняя грань принадлежит самому множеству, то она является наибольшим значением этого множества, и обратно.

Аналогично определение для **точной нижней грани** множества A , которую обозначают $\inf A$ или $\inf_{x \in A} x$ (произносят „инфимум“).

Для ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}$ числовой прямой \mathbb{R} понятие точной верхней грани отвечает следующим свойствам числа $\sup A$:

1) $\forall x \in A \quad x \leq \sup A$, ибо $\sup A$ — верхняя граница множества A ;

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x^* \in A: x^* > \sup A - \varepsilon$, поскольку если бы такого x^* не существовало, то число $\sup A - \varepsilon$ являлось бы верхней границей множества A , меньшей чем $\sup A$, что противоречит определению точной верхней грани.

Аналогично, число $\inf A$ есть точная нижняя грань множества $A \subset \mathbb{R}$, если:

1) $\forall x \in A \quad x \geq \inf A$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_* \in A: x_* < \inf A + \varepsilon$.

Указанные свойства полезны при доказательстве теорем, связанных с понятиями точных верхней и нижней граней множества.

Теорема 2.1. Всякое непустое ограниченное сверху множество A числовой прямой \mathbb{R} имеет единственную точную верхнюю грань.

◀ Пусть a_0 — любое число из A и b_0 — любое число, превосходящее все числа из A . Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ пополам. Если его правая половина содержит точки из A , то в качестве отрезка $[a_1, b_1]$ выбираем эту половину. Если же она не содержит точек из A , то за отрезок $[a_1, b_1]$ берем левую половину отрезка $[a_0, b_0]$. Пусть $[a_2, b_2]$ — правая

половина $[a_1, b_1]$, если она содержит точки из A ; в противном случае $[a_2, b_2]$ — левая половина отрезка $[a_1, b_1]$. По тому же правилу выбираем $[a_3, b_3]$, и, значит, $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ есть правая половина $[a_n, b_n]$, если она содержит точки из A , в противном случае $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ — левая половина $[a_n, b_n]$. Итак, построена система вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

каждый из которых содержит хотя бы одну точку из A , но правее его нет точек из A . Согласно *принципу вложенных отрезков* существует хотя бы одна точка b , принадлежащая всем этим отрезкам. Докажем, что $b = \sup A$.

В самом деле, докажем сначала, что правее b нет точек из A . Пусть $b < x^* \in A$. Тогда каждый из отрезков $[a_n, b_n]$ наряду с точкой b должен содержать и точку x^* , поскольку x^* не может лежать правее $[a_n, b_n]$ в силу правила построения системы вложенных отрезков. Отсюда расстояние $x^* - b$ между точками x^* и b должно быть меньше длины $(b_0 - a_0)/2^n$ отрезка $[a_n, b_n]$. Но это невозможно при $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющем неравенству

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} < x^* - b.$$

Поэтому правее b точек из A быть не может.

Пусть ε — любое положительное число. При достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ $b_n - a_n < \varepsilon$, а так как $[b_n, a_n]$ содержит точку b , все точки этого отрезка лежат во всяком случае правее точки $b - \varepsilon$. По построению $[a_n, b_n]$ содержит хотя бы одну точку из A , которая, следовательно, лежит правее $b - \varepsilon$. Итак, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует точка из A , лежащая правее $b - \varepsilon$. Это означает, что b обладает и вторым свойством точной верхней грани, и поэтому b есть точная верхняя грань множества A .

Если бы у множества A существовали две точные верхние грани b' и b'' ($b' < b''$), то по первому свойству грани b' между

b' и b'' не могут лежать точки из A , а по второму свойству грани b'' это должно иметь место. Такое противоречие доказывает единственность точной верхней грани множества A . ►

Аналогичным образом можно доказать существование точной нижней грани непустого ограниченного снизу множества числовой прямой.

Пример 2.10. а. Пусть $A = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ — интервал (a, b) числовой прямой. Для него $\sup A = b$, $\inf A = a$, причем ни точная верхняя, ни точная нижняя грани не принадлежат заданному множеству.

б. Для отрезка $B = [a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ точная верхняя грань $\sup B = b$ и точная нижняя грань $\inf B = a$ принадлежат заданному множеству и являются соответственно его наибольшим и наименьшим значениями.

в. Пусть $C \subset \mathbb{R}$ — множество всех правильных дробей. Тогда имеем $\sup C = 1$ и $\inf C = 0$. #

Для числовых множеств из \mathbb{R} приведем нижеследующие утверждения.

Утверждение 2.1. Если множества A и B ограничены сверху и $A \subset B$, то $\sup A \leq \sup B$; если A и B ограничены снизу и $A \subset B$, то $\inf A \geq \inf B$.

◀ Действительно, в первом случае $\sup B$ является верхней границей для B и тем более — для $A \subset B$. Поэтому $\sup A \leq \sup B$. Во втором случае аналогично первому $\inf B$ является нижней границей для B и тем более — для $A \subset B$. Поэтому $\inf B \leq \inf A$. ►

Утверждение 2.2. Если для $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$ выполнено неравенство $x \leq y$, то A ограничено сверху, B — снизу и $\sup A \leq \inf B$.

◀ Действительно, множество A ограничено сверху любым элементом $y \in B$. Поэтому $\sup A$ существует и $\sup A \leq y$ для

$\forall y \in B$. Отсюда следует, что B ограничено снизу числом $\sup A$, а значит, $\sup A \leq \inf B$. ►

Понятие ограниченного числового множества тесно связано с понятием ограниченной действительной функции.

Дополнение 2.1. Мощность множества

Первым вопросом, возникшим в связи с *бесконечными множествами*, был вопрос о возможности их количественного сравнения между собой. Ответ на этот и близкие вопросы дал в конце 70-х гг. XIX в. Г. Кантор. В основе сравнительной количественной оценки множеств лежит понятие *биективного (взаимно однозначного) отображения*, когда каждому элементу a из множества A соответствует один и только один элемент b из множества B , а с каждым элементом $b \in B$ может быть соотнесен один и только один элемент $a \in A$ (обозначают $a \leftrightarrow b$).

Определение 2.6. Множества A и B называют *эквивалентными*, или *равномощными* (имеющими одинаковую *мощность*), и записывают $A \sim B$, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, между двумя *конечными множествами* можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда оба множества состоят из одного и того же числа элементов. Мощность конечного множества A определяют его *кардинальным числом*, равным количеству N_A элементов этого множества, и записывают $\text{card } A = N_A$. Пустое множество \emptyset имеет мощность, равную нулю, т.е. $\text{card } \emptyset = 0$. Для равномощных множеств A и B обозначения $A \sim B$ и $\text{card } A = \text{card } B$ равносильны.

Бесконечные множества могут отличаться по мощности. Для характеристики их мощности также используют обозначение кардинального числа. Бесконечное множество E , равно-

мощное множеству N натуральных чисел, называют **счетным** и записывают $\text{card } E = \text{card } N = \aleph_0$ (произносят „алеф-нуль“ по названию буквы \aleph („алеф“) древнееврейского алфавита).

Чтобы установить счетность некоторого бесконечного множества, надо указать, каким образом его элементы могут быть занумерованы без повторений с помощью множества натуральных чисел, каждое из которых служит номером (индексом) только одному элементу данного множества. Такой бесконечный перечень элементов множества, а по сути взаимно однозначное соответствие между элементами рассматриваемого множества и натуральными числами, называют **пересчетом элементов множества**.

Счетным является, например, множество четных чисел, хотя оно составляет лишь подмножество множества натуральных чисел, а четных чисел, казалось бы, вдвое меньше, чем натуральных. Тем не менее эти множества равномощны, поскольку каждому четному числу $2n$ взаимно однозначно соответствует его номер $n \in N$.

Пример 2.11. Докажем счетность множества Z целых чисел. Для этого установим взаимно однозначное соответствие между множеством $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ и множеством $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ следующим образом: $1 \leftrightarrow 0$; $2 \leftrightarrow 1$; $3 \leftrightarrow -1$; $4 \leftrightarrow 2$; $5 \leftrightarrow -2$ и т.д., расположив при пересчете элементы из Z по мере возрастания их абсолютных значений: $0, 1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots, (n \in N)$. Возможность такого пересчета элементов множества Z и доказывает его равномощность множеству N натуральных чисел, т.е. множество Z является счетным, $\text{card } Z = \aleph_0$. #

Теперь рассмотрим более сложный пример.

Пример 2.12. Докажем счетность множества Q_+ рациональных положительных чисел, каждое из которых представимо рациональной дробью $m/n \quad \forall m, n \in N$. Расположим все эти

числа в бесконечной таблице с номером столбца m и номером строки n :

1	2	3	4	...	m	...
$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$...	$m/2$...
$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$...	$m/3$...
$1/4$	$2/4$	$3/4$	$4/4$...	$m/4$...
...
$1/n$	$2/n$	$3/n$	$4/n$...	m/n	...
...

Очевидно, что с учетом возможности сокращения числителя и знаменателя рациональной дроби на натуральное число некоторые числа, стоящие на различных местах в этой таблице, будут равны между собой. В частности, равны единице все числа, стоящие на главной диагонали таблицы. Расположим числа из таблицы, начиная с ее верхнего левого угла и далее последовательно по диагонали, пропуская уже встречавшиеся ранее:

$$1, 2, 1/2, 3, 1/3, 4, 3/2, 2/3, 1/4, \dots, m/n, \dots$$

Такое расположение позволяет занумеровать все рациональные положительные числа, что доказывает счетность множества Q_+ , т.е. $\text{card } Q_+ = \aleph_0$. #

В примерах 2.11 и 2.12 необходимо обратить внимание на то, что в каждом из бесконечных множеств Z и Q_+ имеется *собственное подмножество* N , равномошное всему множеству. Поскольку элементы любого бесконечного подмножества счетного множества можно пронумеровать с помощью натуральных чисел, такое подмножество равномошно множеству N , т.е. счетно. Оказывается, любое бесконечное множество включает собственное подмножество, равномошное (или эквивалентное) всему этому множеству, но ни в одном конечном множестве нельзя найти равномошного собственного подмножества.

Ценность понятия мощности множества связана с существованием неравномощных (или неэквивалентных) бесконечных множеств. Для двух бесконечных множеств A и B возможны лишь три следующие ситуации:

1) в A есть собственное подмножество, равномощное B , но в B нет собственного подмножества, равномощного A (в этом случае говорят, что мощность A больше мощности B и записывают $\text{card } A > \text{card } B$);

2) в B есть собственное подмножество, равномощное A , но в A нет собственного подмножества, равномощного B (тогда говорят, что мощность B больше мощности A , и пишут $\text{card } B > \text{card } A$);

3) в A есть собственное подмножество, равномощное B , и в B есть собственное подмножество, равномощное A (тогда можно доказать, что A и B равномощны, т.е. $A \sim B$, или $\text{card } A = \text{card } B$).

Следует заметить, что для бесконечных множеств ситуация, когда в A нет собственного подмножества, равномощного B , и в B нет собственного подмножества, равномощного A , не имеет места. Мощность счетных множеств есть наименьшая мощность, которую может иметь бесконечное множество. Такое заключение можно сделать на основании следующей теоремы.

Теорема 2.2. Всякое бесконечное множество включает счетное подмножество.

◀ Пусть A — бесконечное множество. Так как оно непустое, выберем среди его элементов какой-нибудь один; пусть им будет a_1 . Множество $A \setminus \{a_1\}$ также непустое. Выберем в нем любой элемент и обозначим его a_2 и т.д. После выделения таким способом n элементов множество $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ снова не будет пустым и можно будет выбрать еще один элемент a_{n+1} и т.д. В итоге придем к счетному подмножеству $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$, которое включено в множество A . ▶

Бесконечное множество, мощность которого превышает мощность счетного множества, называют **несчетным**. Например, мощность множества точек интервала $(0, 1)$ числовой прямой, являющегося подмножеством множества \mathbb{R} действительных чисел, выше мощности \aleph_0 множества \mathbb{N} натуральных чисел. Это утверждает следующая теорема.

Теорема 2.3. Множество $(0, 1)$ несчетно.

◀ Допустим, что это множество счетно, т.е. все элементы интервала $(0, 1)$ могут быть записаны в виде некоторого бесконечного перечня действительных чисел: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ($n \in \mathbb{N}$). Каждое из этих чисел $x \in (0, 1)$ может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби $x = 0, a_1 a_2 \dots a_j \dots$ ($j \in \mathbb{N}$), где a_j обозначает одну из цифр 0, 1, 2, ..., 9 и является j -м десятичным знаком данного числа.

Рассмотрим теперь действительное число ζ , определяемое следующим образом: в качестве его j -го десятичного знака b_j выберем какую-либо цифру между 1 и 8, отличную от j -го десятичного знака числа x_j , $\forall j \in \mathbb{N}$. Тогда получим бесконечную дробь $\zeta = 0, b_1 b_2 \dots b_j \dots b_n \dots$ ($j, n \in \mathbb{N}$), которая представляет собой число, отличное от любого из чисел x_n , причем $\zeta \in (0, 1)$. Заметим, что использование в качестве b_j цифр 0 и 9 может создать затруднения, поскольку число, в десятичном представлении которого с некоторого места стоят только нули, допускает иное десятичное представление, содержащее с последующего места одни девятки (например, $0,1020000\dots = 0,1019999\dots$).

Итак, множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ всех элементов интервала $(0, 1)$ не содержит числа ζ , принадлежащего этому же интервалу. Установленное противоречие и доказывает, что множество $(0, 1)$ несчетно. ►

Покажем теперь, что множество \mathbb{R} действительных чисел тоже не является счетным. Функция

$$f(x) = \lg \frac{x}{1-x}, \quad x \in (0, 1),$$

взаимно однозначно отображает интервал $(0, 1)$ на всю числовую прямую. Поэтому, согласно определению 2.2 эквивалентности (равномощности) множеств, множество \mathbb{R} и его подмножество $(0, 1)$ имеют одинаковую мощность, т.е. $\text{card}(0, 1) = \text{card } \mathbb{R}$. Мощность множества \mathbb{R} всех действительных чисел именуют **мощностью континуума** и обозначают $\text{card } \mathbb{R} = \aleph$. Иногда вместо \aleph пишут 2^{\aleph_0} . Ясно, что $\aleph > \aleph_0$, т.е. мощность континуума выше мощности счетного множества.

Отметим, что *промежутки* числовой прямой имеют с \mathbb{R} одинаковую мощность. Например, то, что для интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ $\text{card}(a, b) = \text{card } \mathbb{R}$, можно показать геометрически (рис. 2.12). Для этого из точки O радиусом $r = (b - a)/2$ опишем открытую полуокружность (отсутствие концевых точек у полуокружности условно отмечено на рисунке стрелками) и проведем прямую (\mathbb{R}) , перпендикулярную к лучу OM , проходящему через среднюю точку M этой полуокружности. Взаимно однозначное соответствие точек полуокружности и интервала (a, b) можно установить параллельной проекцией (сплошные линии, параллельные лучу OM). Центральная проекция из центра полуокружности (штриховые линии, исходящие из точки O) также устанавливает взаимно однозначное соответствие, но теперь уже точек полуокружности и всей числовой прямой.

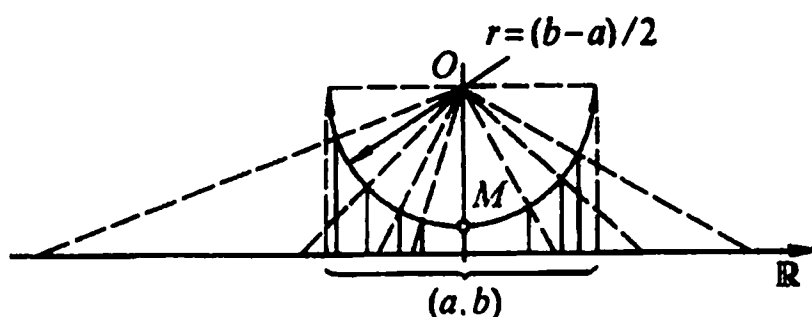


Рис. 2.12

Таким образом, имеем композицию биективного отображения множества точек числовой прямой \mathbb{R} на множество точек открытой полуокружности и биективного отображения этого

последнего множества на множество точек интервала (a, b) . В силу биективности композиции биективных отображений устанавливаем однозначное соответствие множества \mathbb{R} и его подмножества (a, b) , т.е. их равномощность.

Примером множества, мощность которого превышает мощность континуума, является множество $P(\mathbb{R})$ всех подмножеств множества \mathbb{R} действительных чисел, т.е. $\text{card } P(\mathbb{R}) > \text{card } \mathbb{R} = \aleph$. Мощность множества $P(\mathbb{R})$ иногда называют **мощностью гиперконтинуума**. Однако не существует множества с наибольшей мощностью (подобно тому как не существует наибольшего натурального числа), поскольку для любого множества E мощность $\text{card } P(E)$ множества $P(E)$ всех его подмножеств всегда больше $\text{card } E$. Например, если $\text{card } \mathbb{N} = \aleph_0$, то $\text{card } P(\mathbb{N}) = \aleph > \aleph_0$.

В 1878 г. Г. Кантор высказал так называемую континуум-гипотезу, впоследствии вошедшую под первым номером в список проблем Д. Гильберта. Согласно континуум-гипотезе \aleph является кардинальным числом (мощностью множества), непосредственно следующим за \aleph_0 , или, иначе, не существует бесконечного множества, мощность которого больше мощности счетного множества, но меньше мощности континуума. В 1963 г. американский математик П. Козэн доказал, что континуум-гипотеза неразрешима в рамках существующей теории множеств — ее невозможно ни доказать, ни опровергнуть, можно лишь принять ее или противоположное ей утверждение как аксиому.

Дополнение 2.2. Неподвижная точка отображения

Пусть заданы отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$.

Теорема 2.4. Если $g \circ f = I_X: X \rightarrow X$, то g сюръективно, а f инъективно.

◀ Если g несюръективно, то в X найдется элемент $x \in X$, такой, что $x \notin g(Y) \supseteq g(f(X)) = I_X(X) = X$. Это противоречие доказывает сюръективность g .

Если $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$, то по определению тождественного отображения $I_X(x_1) \neq I_X(x_2)$. Но тогда $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Отсюда с учетом определения 2.1 отображения имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. отображение f инъективно. ►

Теорема 2.5. Отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ биективны и взаимно обратны тогда и только тогда, когда $g \circ f = I_X$ и $f \circ g = I_Y$.

◀ По теореме 2.2 имеем сюръективность и инъективность каждого из отображений f и g , т.е. их биективность. Обратно, биективность отображений f и g означает в данном случае, что они взаимно обратны, т.е. их композиции являются тождественными отображениями. ►

Обсуждение этих вопросов имеет определенное практическое значение, так как они связаны с разрешимостью уравнений вида

$$f(x) = y \quad (2.10)$$

относительно $x \in X$ при заданном $y \in Y$. Если имеется отображение $g: Y \rightarrow X$, такое, что $f \circ g = I_Y$, то решение обязательно существует, но не обязательно единственное. Наоборот, существование такого отображения $g: Y \rightarrow X$, что $g \circ f = I_X$, означает: если решение существует, то оно единственно. И лишь одновременное выполнение условий $f \circ g = I_Y$ и $g \circ f = I_X$ гарантирует существование и единственность решения не только (2.10), но и обратного к нему уравнения $g(y) = x$ относительно $y \in Y$ при заданном $x \in X$.

Итак, для однозначного решения (2.10) достаточно построить отображение g , такое, чтобы f и g были взаимно обратными отображениями. Но сделать это не всегда просто, а в случае, когда f небиективно, невозможно. Путем тождественных

преобразований задачу можно свести к поиску так называемой **неподвижной точки** $x^* \in X$ **отображения** $\varphi: X \rightarrow X$ множества X в себя (см. 2.2), для которой $x^* = \varphi(x^*)$. Отметим сразу, что в отличие от **преобразования** множества X на себя, которое является биекцией, отображение φ может быть произвольным.

Особенность неподвижной точки отображения состоит в том, что при отображении она переходит сама в себя, то

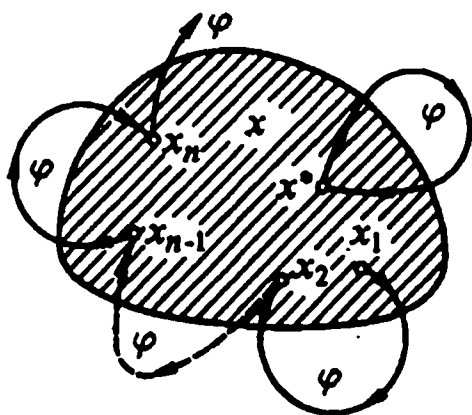


Рис. 2.13

гда как прочие точки при отображении сдвигаются, например x_1 переходит в x_2 и т.д. (рис. 2.13). Неподвижные точки отображения φ образуют множество X^* , каждый элемент $x^* \in X^*$ которого является решением уравнения

$$x = \varphi(x). \quad (2.11)$$

В частности, это множество может быть **пустым** ($X^* = \emptyset$) или содержать единственный элемент ($\exists! x^* \in X^* \subset X: x^* = \varphi(x^*)$), т.е. решение (2.11) может отсутствовать или быть единственным.

Многие задачи вычислительной математики можно свести к отысканию неподвижных точек отображений, для чего используют **метод последовательных приближений**, или **метод итераций**, суть которого состоит в построении **итерационного алгоритма**. Если задать первое приближение $x_1 \in X$, то можно построить так называемую **итерационную последовательность** (см. рис. 2.13)

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_{n+1} = \varphi(x_n), \dots\}$$

элементов $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$.

Будут ли приближаться (или, как говорят, **сходиться**) элементы этой последовательности к неподвижной точке отображения? Ответ на этот непростой вопрос зависит от свойств

множества X , отображения φ и выбора элемента $x_1 \in X$ в качестве первого приближения (см. Д.8.1 и Д.8.2). Здесь ограничимся лишь иллюстрацией.

Пример 2.13. Пусть отображению φ в (2.11) отвечает функция

$$\varphi(x) = \lambda x(1 - x), \quad x \in X = [0, 1], \quad \lambda > 0.$$

Сразу видно, что одна из неподвижных точек этого отображения $x_0^* = 0$, а вторая $x^* = 1 - 1/\lambda$ имеет смысл лишь при $\lambda > 1$. Но обратившись к методу итераций и выбрав в качестве первого приближения $x_1 \in (0, 1)$, получим итерационную последовательность $\{x_n\}$, для которой

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Отметим, что (2.12) можно рассматривать как упрощенную математическую модель эволюции биологической популяции с коэффициентом λ размножения особей, относительная численность x_n которых уменьшается через равные промежутки времени пропорционально множителю $(1 - x_n)$ из-за ограниченности ресурсов при „перенаселении“.

При $\lambda \leq 1$ и $x \in X$ график функции $\varphi(x)$ лежит ниже биссектрисы $y = x$ координатного угла xOy (рис. 2.14) и $\forall x_1 \in (0, 1)$ элементы последовательности $\{x_n\}$ приближаются к точке „притяжения“ $x_0^* = 0$ (ломаная со стрелками), т.е. популяция гибнет из-за малости коэффициента размножения.

Если $\lambda > 1$, то, как бы близко к точке $x_0^* = 0$ ни было x_1 , элементы последовательности $\{x_n\}$ „уходят“ от этой „гибельной“ точки (она становится точкой „отталкивания“), и популяция выживает, причем возможны такие варианты:

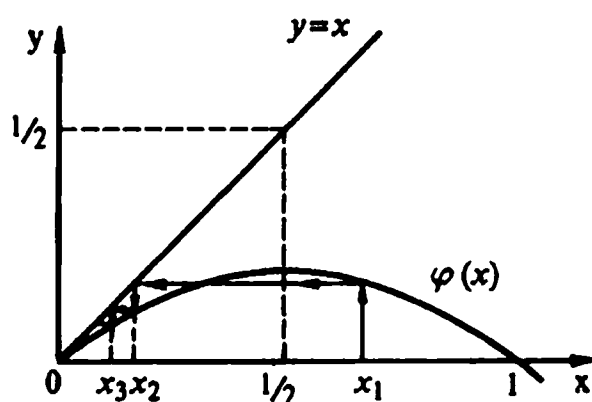


Рис. 2.14

1) для $1 < \lambda \leq 2$ численность x_n популяции приближается к x^* монотонно, возрастая при $x_1 < x^*$ (при $1 - x^* < x_1'' < 1$ с $n = 3$) и убывая при $x^* < x_1' < 1 - x^*$ (рис. 2.15,а);

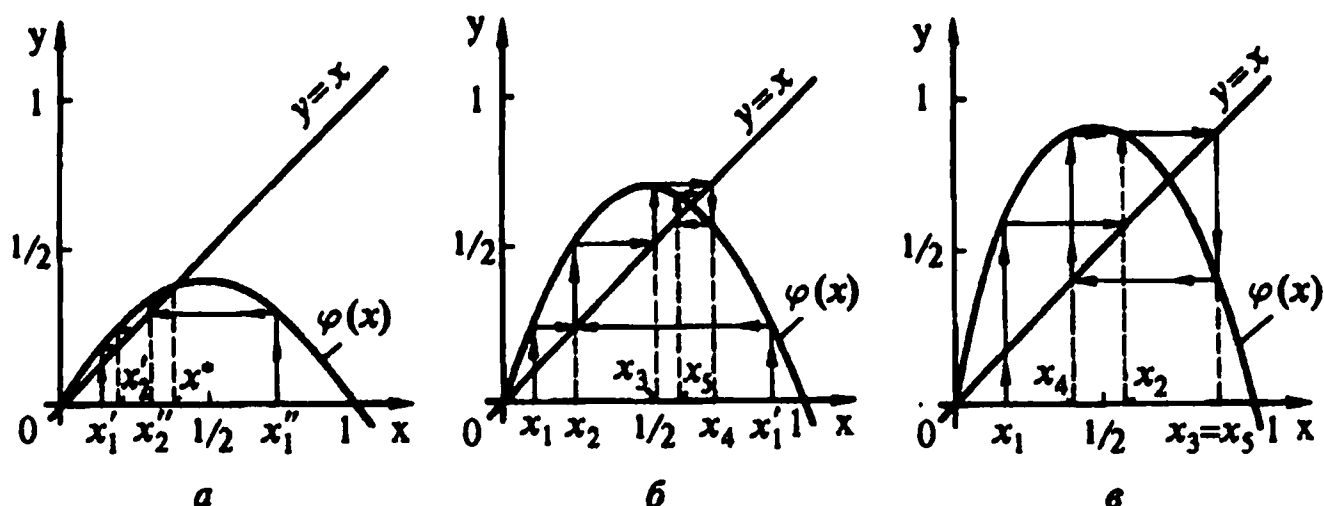


Рис. 2.15

2) для $2 < \lambda \leq 3$ x_n приближается к x^* немонотонно, ломаная спираль закручивается по часовой стрелке (рис. 2.15,б);

3) для $3 < \lambda < 4$ $\forall x_1 \in (0, 1)$ x_n не приближается к x^* , причем в некоторых случаях итерационный алгоритм „зацикливается“ (рис. 2.15,в), т.е. число особей в популяции периодически повторяется;

4) для $\lambda \geq 4$ итерационный алгоритм (2.12) неработоспособен и может при некоторых n давать значения $x_n \notin X$.

Из этого примера видно, насколько важно располагать общим признаком наличия у отображения неподвижных точек и устанавливать еще до реализации итерационного алгоритма его работоспособность.

Вопросы и задачи

2.1. Найти множество, на которое отображает множество X каждая из следующих функций:

$$f(x) = x^2, \quad X = [-1, 2];$$

$$f(x) = |x|, \quad X = \{x : -1 < x < 2\};$$

$$f(x) = x/(2x - 1), \quad X = [0, 1);$$

$$f(x) = \sin \pi x, \quad X = [0, 3/4);$$

$$f(x) = \log_3 x, \quad X = (1/3, 27];$$

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}, \quad X = (0, 1].$$

Для каждой функции найти график отображения и построить его.

2.2. Верны ли равенства $f^{-1}(f(A)) = A$ и $f(f^{-1}(S)) = S$, где A — множество из области определения функции f , а S — множество из области значений этой функции?

2.3. Доказать, что

$$f\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \bigcap_{k=1}^n f(A_k),$$

если $f: A_k \rightarrow Y$ — взаимно однозначное отображение ($k = \overline{1, n}$).

2.4. Пусть множества X и Y содержат соответственно m и n элементов. Найти число отображений множества X в множество Y , в том числе сюръекций, инъекций и биекций.

2.5. В каком случае справедливы равенства $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ и $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$, где A и B — множества из области определения функции f ?

2.6. Доказать дистрибутивность произведения произвольных множеств по отношению к операциям объединения, пересечения и разности.

2.7. Являются ли отношениями порядка: а) „ x тяжелее y “ в множестве гирь; б) „ x старше y “ в множестве людей; в) „ x подчинен y “ в множестве должностей; г) „ x не превосходит y “ в множестве номеров домов на улице; д) „из x следует y “ в множестве высказываний; е) „ x находится внутри y “

в множестве окружностей на плоскости? Какие из этих множеств являются частично упорядоченными?

2.8. В хоккейной команде 2 вратаря, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку игроков, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

2.9. Замок сейфа имеет пять дисков с цифрами 0, 1, 2, ..., 9 на каждом диске. Замок можно открыть при наборе на дисках шифра в виде определенной комбинации цифр. На набор одной комбинации цифр уходит пять секунд. Достаточно ли пяти суток для того, чтобы открыть сейф, не зная шифра?

2.10. Найти сумму квадратов биномиальных коэффициентов для $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.11. Существует ли система вложенных интервалов

$$(a_1, b_1) \supset \dots \supset (a_n, b_n) \supset (a_{n+1}, b_{n+1}) \supset \dots, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеющая общую точку? Всякая ли система вложенных интервалов имеет непустое пересечение?

2.12. Доказать, что для конечного множества A , содержащего n элементов, мощность $\text{card } P(A)$ множества $P(A)$ всех подмножеств множества A равна 2^n .

2.13. В каких случаях справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B) &= \text{card } A; & \text{card}(A \cap B) &= \text{card } A; \\ \text{card}(A \setminus B) &= \text{card } A; & \text{card}(A \times B) &= \text{card } A? \end{aligned}$$

2.14. Для изображения цифр почтового индекса используют множество из девяти элементов, которые на рис. 2.16,а обозначены буквами a, b, \dots, i (сами цифры изображены на рис. 2.16,б).

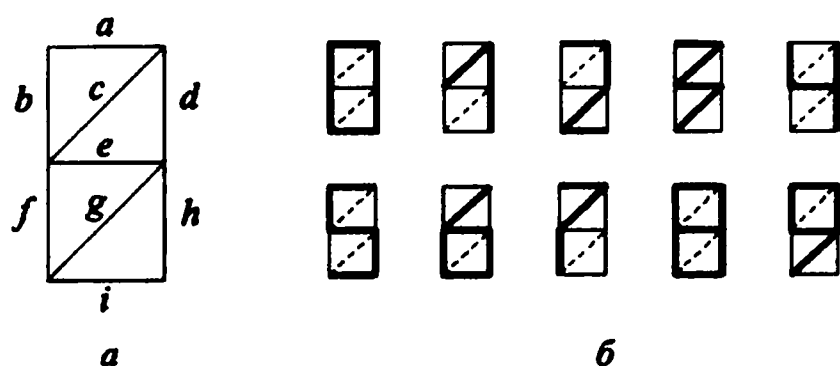


Рис. 2.16

а. Записать множества A_k , ($k = \overline{0, 9}$) элементов, используемых для изображения каждой из десяти цифр. Есть ли среди этих множеств непересекающиеся?

б. Записать для каждого из элементов s ($s = a, b, \dots, i$) множество B_s цифр, в изображении которых использован элемент s . Какие элементы использованы наиболее часто и наиболее редко?

в. Указать цифры, наименее и наиболее близкие к цифре 3, считая мерой близости цифр число общих элементов в их изображении. Какой операции над множествами A_k соответствует множество, определяющее меру близости цифр?

г. Сколько различных фигур можно построить путем комбинации элементов исходного множества, считая, что в каждой комбинации может участвовать от 0 до 9 элементов?

3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3.1. Функция и ее график

Пусть задано множество $X \subseteq \mathbb{R}$ точек числовой прямой.

Определение 3.1. Действительной функцией действительного переменного (далее просто *функцией*), определенной на множестве X , называют соответствие f , которое каждой точке $x \in X$ соотносит некоторую единственную точку $y \in \mathbb{R}$.

При этом множество X называют *областью определения* (или *областью существования*) функции f и обозначают $D(f)$, точку $x \in X$ — *аргументом функции*, точку $y \in \mathbb{R}$, соответствующую x , — *значением функции в точке x* и обозначают $f(x)$. Множество

$$f(X) = \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}$$

называют *областью значений функции f* и обозначают $R(f)$. Факту задания функции f соответствует запись $y = f(x)$, $x \in X$. Обозначение функции в виде $f(x)$ ввел Л. Эйлер.

Итак, понятие функции состоит из трех неотъемлемых частей:

- 1) области определения $D(f) = X \subseteq \mathbb{R}$;
- 2) области значений $R(f) = f(X) \subseteq \mathbb{R}$;
- 3) правила f , которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие некоторую единственную точку $y = f(x) \in f(X) \subseteq \mathbb{R}$.

Определение 3.2. Множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in X$ называют *графиком функции f* , определенной на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$.

Напомним, что графиком функции $y = kx + b$ является **прямая**, графиком $y = ax^2$ — кривая, называемая **параболой**, а графиком $y = h/x$ — **гиперболой** (на рис. 3.1 даны графики этих функций при значениях $k = 1/2$, $b = a = h = 1$). Нетрудно установить, что $D(kx + b) = D(ax^2) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $R(kx + b) = \mathbb{R}$, $R(ax^2) = [0, +\infty)$ при $a > 0$ и $R(ax^2) = (-\infty, 0]$ при $a < 0$, $D(h/x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R(h/x) = \mathbb{R}$.

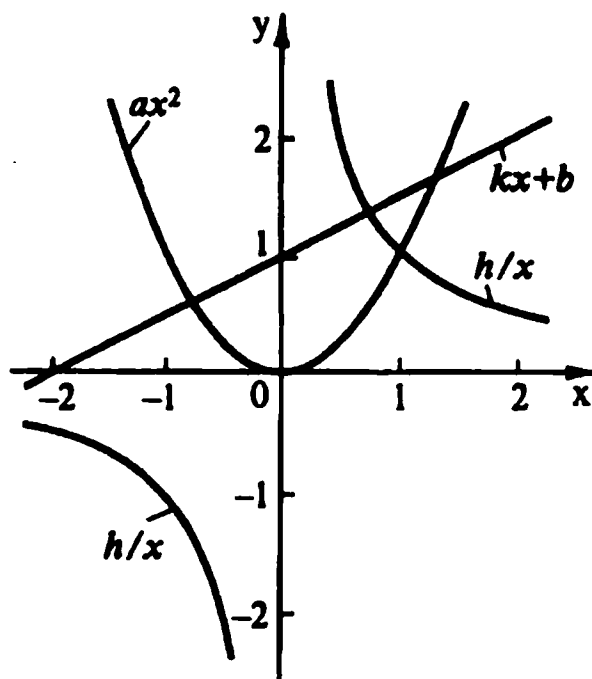


Рис. 3.1

Не для всякой функции график будет линией в обычном представлении. Характерным примером является **функция Дирихле**, носящая имя немецкого математика П.Г.Л. Дирихле (1805–1859). Она равна единице, если аргументом является рациональное число, и нулю — в противном случае, т.е.

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Ясно, что если Γ — график функции $f(x)$, то графики функций $-f(x)$ и $f(-x)$ можно получить зеркальным отражением Γ относительно осей Ox и Oy соответственно, а графики функций $f(x - a)$ и $f(x) + b$ — сдвигом графика $f(x)$ соответственно вдоль оси Ox на a вправо, если $a > 0$ (влево, если $a < 0$) и вдоль оси Oy на b вверх при $b > 0$ (вниз при $b < 0$). Графики функций $f(x/k)$, $k > 0$, и $cf(x)$, $c > 0$, можно получить „растяжением“ Γ вдоль оси Ox в k раз и вдоль оси Oy в c раз. Таким образом, путем простых преобразований графика Γ исходной функции $f(x)$ нетрудно построить график функции вида $pf(qx - r) + s$, $p, q, r, s \in \mathbb{R}$.

3.2. Основные способы задания функции

Для изучения *функции* ее необходимо задать, т.е. указать правило, позволяющее по значению *аргумента* находить соответствующее ему значение *функции*. Это правило можно указать различными способами. Рассмотрим основные.

Функция $y = f(x)$, $x \in X$ задана **явным аналитическим способом**, если дана формула, указывающая последовательность математических действий, которые надо выполнить с аргументом x , чтобы получить значение $f(x)$ этой функции (например, $y = x^3 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; $y = \sin x$, $x \in (0, \pi]$). Умение записать функцию в виде формулы уже само по себе может быть решающим при рассмотрении простейших задач.

Пример 3.1. Стержень длиной l опирается одним концом на тележку, а его другой конец скользит вниз вдоль вертикальной стены с постоянной скоростью v (рис. 3.2). В некоторый момент времени t_0 тележка находилась на расстоянии b от стены. Найти момент времени t , когда тележка находится на расстоянии x от стены ($b < x \leq l$).

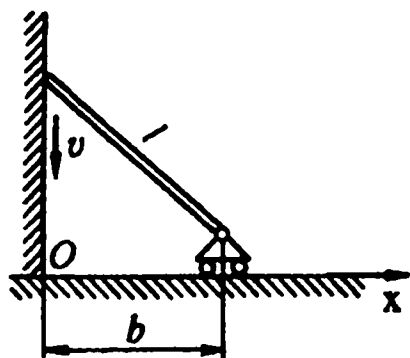


Рис. 3.2

Чтобы тележка прошла расстояние $x - b$, верхний конец стержня должен опуститься на расстояние $\sqrt{l^2 - b^2} - \sqrt{l^2 - x^2}$, равное $v(t - t_0)$. Отсюда следует зависимость t от x в виде функции $t = f(x)$:

$$t = t_0 + \frac{\sqrt{l^2 - b^2} - \sqrt{l^2 - x^2}}{v}.$$

Расстояния l от стены тележка достигнет к моменту времени

$$t^* = t_0 + \frac{\sqrt{l^2 - b^2}}{v}.$$

Если в начальный момент времени $t_0 = 0$ стержень вертикален ($b = 0$), то функция $t = f(x)$ примет вид

$$t = \frac{l - \sqrt{l^2 - x^2}}{v},$$

а t^* в этом частном случае, очевидно, равно l/v .

Пример 3.2. Висячий мост длиной b подвешен на канате, закрепленном на одинаковой высоте на береговых опорах, расстояние между которыми l (рис. 3.3). Провисая, канат принимает форму параболы, причем точки A и B подвеса моста к канату опускаются на расстояние h . Найти наибольшее провисание w каната (стрелу провеса).

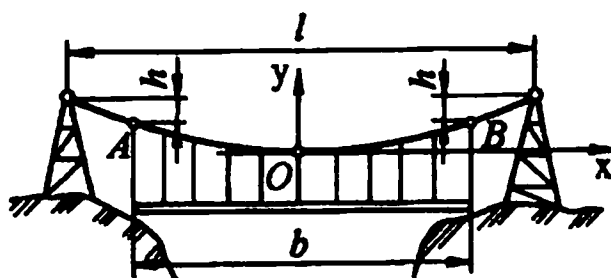


Рис. 3.3

Парабола, описывающая форму каната, имеет уравнение $y = ax^2$ при выборе начала координат в точке наибольшего провисания каната (см. рис. 3.3). Тогда искомая величина будет *ординатой* точек крепления каната на опорах, т.е.

$$w = a \left(\frac{l}{2} \right)^2,$$

а ордината $w - h$ и абсциссы $\mp b/2$ точек A и B должны тождественно удовлетворять уравнению параболы

$$w - h = a \left(\mp \frac{b}{2} \right)^2.$$

Исключив из двух последних равенств коэффициент a , найдем $(w - h)/w = (b/l)^2$, или

$$w = \frac{h}{1 - (b/l)^2},$$

а затем $a = 4h/(l^2 - b^2)$. В итоге получим уравнение

$$y = \frac{4h}{l^2 - b^2} x^2,$$

описывающее форму каната. #

Иногда рассматриваемая функция может быть задана несколькими формулами, действующими на различных участках области ее определения, в которой изменяется аргумент функции. Например,

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x < 2, \\ x + 1, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad (3.2)$$

График этой функции изображен на рис. 3.4. Каждому значению $x \in \mathbb{R}$ отвечает одно единственное вполне определенное значение $y \in \mathbb{R}$. Поэтому (3.2) задает, согласно определению 3.1, функцию. Не следует думать, что если в (3.2) две формулы, то и речь идет о двух функциях. Ведь к каждому значению x имеет отношение только одна из двух формул.

Функции вида (3.2) иногда называют *составными*. К таким функциям относят, например,

- 1) $y = |x|$ — абсолютное значение числа x (рис. 3.5),

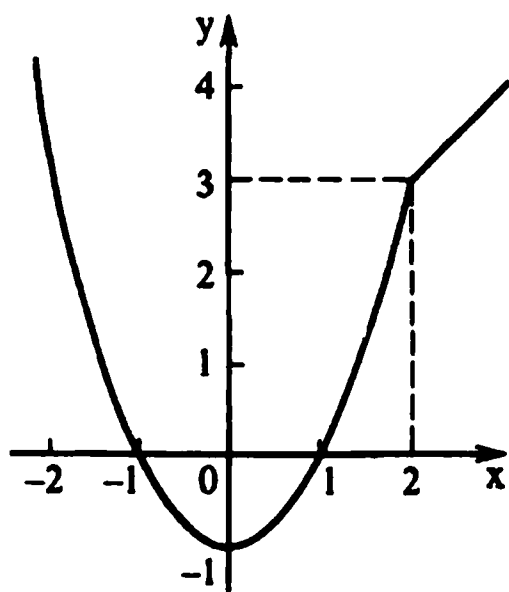


Рис. 3.4

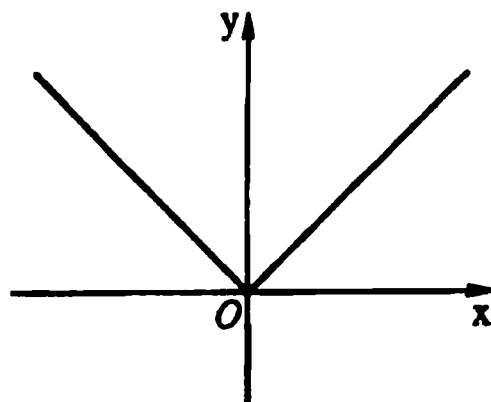


Рис. 3.5

2) **функцию знака** — „сигнум x “ (рис. 3.6,а)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

3) **единичную функцию Хевисайда** (рис. 3.6,б)

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

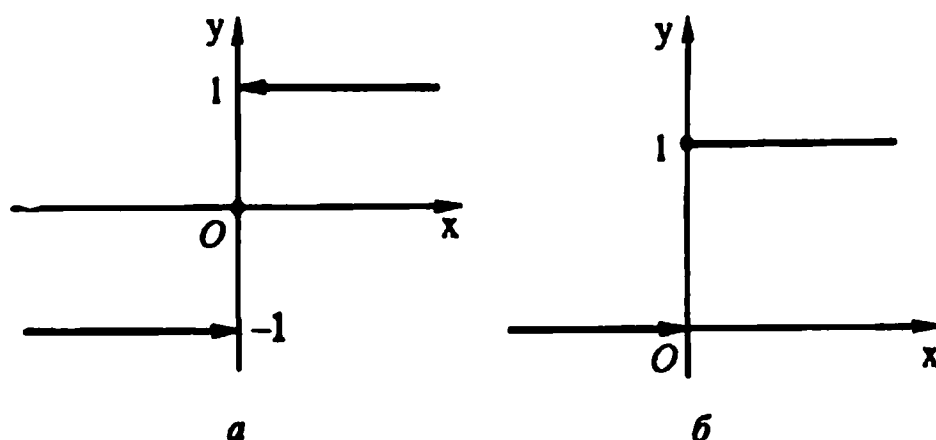


Рис. 3.6

На рис. 3.6 точками отмечены значения функций при $x = 0$, а стрелка на конце линии указывает на то, что конечная точка не принадлежит линии. Составные функции нередко встречаются в технике.

Пример 3.3. Ракета, запущенная с Земли в вертикальном направлении, движется с постоянным ускорением $2g$ в течение времени T работы ее двигателя. Пренебрегая сопротивлением воздуха и изменением с высотой ускорения g земного тяготения, определим зависимость скорости v ракеты от времени t ее полета.

Время t полета ракеты будем отсчитывать от момента старта, когда ее скорость была равна нулю. Тогда во время работы двигателя скорость ракеты

$$v = 2gt, \quad t \in [0, T], \quad (3.5)$$

а высота ее подъема $h = gt^2$. В момент времени T выключения двигателя скорость и высота ракеты соответственно равны $v_T = 2gT$ и $h_T = gT^2$. После выключения двигателя ракета движется с ускорением $-g$, ее скорость

$$v = 2gT - g(t - T) = g(3T - t), \quad (3.6)$$

а высота

$$h = h_T + v_T(t - T) - g \frac{(t - T)^2}{2}.$$

Установим, до какого момента времени справедлива формула (3.6). Наибольшей высоты h^* ракета достигнет в момент времени t^* , когда будет равна нулю ее скорость, т.е. с учетом (3.6) $t^* = 3T$, а

$$h^* = h_T + v_T(t^* - T) - g \frac{(t^* - T)^2}{2} = 3gT^2.$$

При свободном падении с высоты h^* ракета достигнет Земли к моменту времени

$$t_* = t^* + \frac{1}{g} \sqrt{2gh^*} = (3 + \sqrt{6})T$$

со скоростью $v_* = -\sqrt{2gh^*} = -\sqrt{6}gT$ (знак „минус“ означает, что направление скорости противоположно принятому в (3.5) и (3.6) за положительное). В итоге после объединения (3.5) и (3.6) и формул для высоты h получим

$$v(t) = \begin{cases} 2gt & \text{при } t \in [0, T], \\ g(3T - t) & \text{при } t \in (T, t_*) \end{cases} \quad (3.7)$$

и

$$h(t) = \begin{cases} gt^2 & \text{при } t \in [0, T], \\ g(6Tt - t^2 - 3T^2)/2 & \text{при } t \in (T, t_*]. \end{cases}$$

Значение v в момент времени t_* зависит от условий взаимодействия ракеты с поверхностью Земли, и поэтому в (3.7)

функция $v(t)$ определена лишь при $t \in [0, t_*)$. На рис. 3.7 приведены графики зависимостей $\nu = v/(gT)$ и $\zeta = h/(gT^2)$ от $\tau = t/T$. #

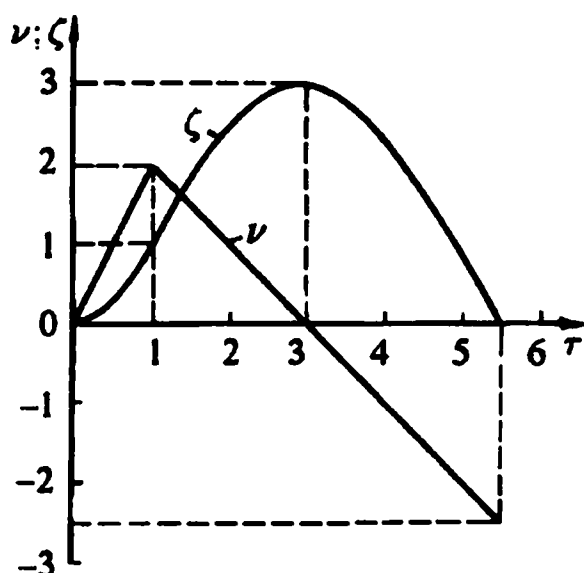


Рис. 3.7

Если функция задана явным аналитическим способом с помощью формулы, но область определения функции в виде множества X не указана, то под X будем всегда подразумевать множество значений аргумента x , при которых данная формула имеет смысл. Например, для функции $y = x^3$ областью определения служит множество $X = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, поскольку аргумент x может принимать любые значения на числовой прямой. Для функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ областью определения будет множество значений x , удовлетворяющих неравенству $4 - x^2 \geq 0$, т.е. $X = [-2, 2]$.

Ясно, что областью определения функции

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } x < a, \\ f_2(x) & \text{при } x \geq a \end{cases}$$

является множество

$$X = (X_1 \cap (-\infty, a)) \cup (X_2 \cap [a, +\infty)),$$

где X_1 и X_2 — области определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно.

Отметим, что явный аналитический способ задания функции достаточно компактен (формула, как правило, занимает немного места), легко воспроизводим (формулу нетрудно записать) и наиболее приспособлен к выполнению над функциями математических действий и преобразований. Некоторые из этих действий — алгебраические (сложение, умножение и др.) — хорошо известны из школьного курса математики,

другие (дифференцирование, интегрирование) будем изучать в дальнейшем. Однако этот способ не всегда нагляден, так как не всегда четок характер зависимости функции от аргумента, а для нахождения значений функции (если они необходимы) требуются иногда громоздкие вычисления.

Функция $y = f(x)$ задана **неявным аналитическим способом**, если дано соотношение

$$F(x, y) = 0, \quad (3.8)$$

связывающее значения функции y и аргумента x . Если задавать значения аргумента, то для нахождения значения y , соответствующего конкретному значению x , необходимо решить уравнение (3.8) относительно y при этом конкретном значении x .

При заданном значении x (3.8) может не иметь решения или иметь более одного решения. В первом случае заданное значение x не принадлежит области определения неявно заданной функции, а во втором случае (3.8) задает **многозначную функцию**, имеющую при данном значении аргумента более одного значения. Рассмотрение многозначных функций неудобно, и его стараются избежать, разбивая такую функцию на несколько однозначных, которые часто называют **однозначными ветвями** многозначной функции. Здесь не будем рассматривать условия, при которых (3.8) задает однозначную функцию, поскольку этот вопрос является далеко не простым.

Отметим, что если (3.8) удастся явно разрешить относительно $y = f(x)$, то получаем ту же функцию, но уже заданную явным аналитическим способом. Так, уравнение $x - y^3 + 1 = 0$ и равенство $y = (x + 1)^{1/3}$ определяют одну и ту же функцию, график которой изображен на рис. 3.8. Если же, разрешая явно (3.8) относительно y , получаем несколько выражений, то приходим к нескольким однозначным явно заданным функциям. Например, из уравнения

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (3.9)$$

которое, как известно, задает в плоскости xOy окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3.9), получаем два выражения $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, которые соответствуют двум однозначным явно заданным функциям $y = \sqrt{1-x^2}$ (верхняя полуокружность) и $y = -\sqrt{1-x^2}$ (нижняя полуокружность).

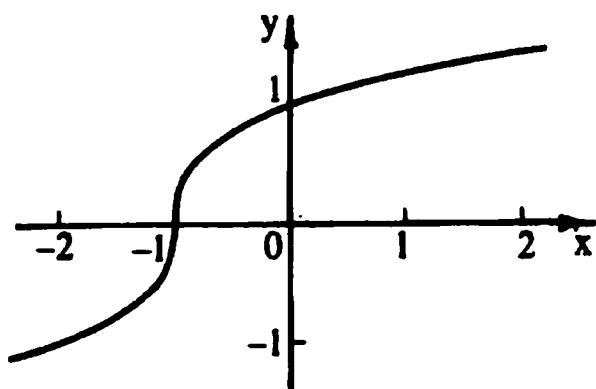


Рис. 3.8

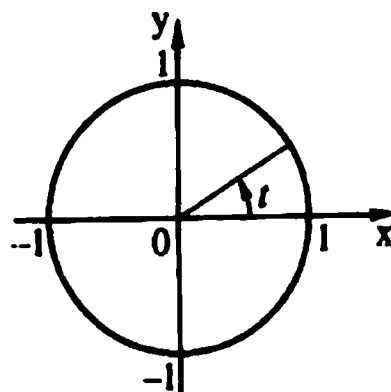


Рис. 3.9

Когда зависимость y от x не задана непосредственно, а вместо этого даны зависимости обоих переменных x и y от некоторого третьего вспомогательного переменного t в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in T \subseteq \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

то это — **параметрический способ задания функции**; тогда вспомогательное переменное t называют **параметром**.

Если из (3.10) удастся исключить параметр t , то придем к функции, заданной явной или неявной аналитической зависимостью y от x . Например, из соотношений

$$\begin{cases} x = 4t + 6, \\ y = 2t + 4, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

исключением параметра t получим зависимость $y = x/2 + 1$, которая задает в плоскости xOy прямую (см. рис. 3.1). Таким образом, (3.11) можно рассматривать как параметрическое

задание прямой. Исключая t из соотношений

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi), \quad (3.12)$$

придем к уже знакомому уравнению (3.9), т.е. (3.12) является параметрической формой задания окружности, причем на рис. 3.9 параметр соответствует углу t (в радианах).

Приведенные выше примеры показывают, что аналитическому способу задания функции соответствует ее графическое изображение, которое можно рассматривать как удобную и наглядную форму описания функции. Иногда используют **графический способ** задания функции, когда зависимость y от x задают линией на плоскости xOy . Однако при всей наглядности он проигрывает в точности, поскольку значения аргумента и соответствующие им значения функции можно получить из графика лишь приближенно. Возникающая при этом погрешность зависит от масштаба и точности измерения абсциссы и ординаты отдельных точек графика. В дальнейшем графику функции отведем роль только иллюстрации поведения функции и поэтому будем ограничиваться построением „эскизов“ графиков, отражающих основные особенности функций.

Отметим **табличный способ** задания функции, когда некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции в определенном порядке размещаются в таблице. Так построены известные таблицы *тригонометрических функций*, таблицы логарифмов и т.п. В виде таблицы обычно представляют зависимость между величинами, измеряемыми при экспериментальных исследованиях, наблюдениях, испытаниях. Недостаток этого способа состоит в невозможности непосредственного определения значений функции для значений аргумента, не входящих в таблицу. Если есть уверенность, что не представленные в таблице значения аргумента принадлежат области определения рассматриваемой функции, то соответствующие им значения функции могут быть вычислены приближенно при помощи интерполяции и экстраполяции.

Функцию можно задать **алгоритмическим** (или **программным**) **способом**, который широко используют при вычислениях на ЭВМ. Наконец, можно отметить **описательный** (или **словесный**) **способ** задания функции, когда правило соответствия значений функции значениям аргумента выражено словами. Например, функцию

$$[x] = m \quad \forall x \in [m, m+1), \quad m \in \mathbb{Z},$$

называемую **целой частью** x (или „**антье** от x “), описывают обычно словами: „Наибольшее целое число, не превосходящее x “. График этой функции показан на рис. 3.10.

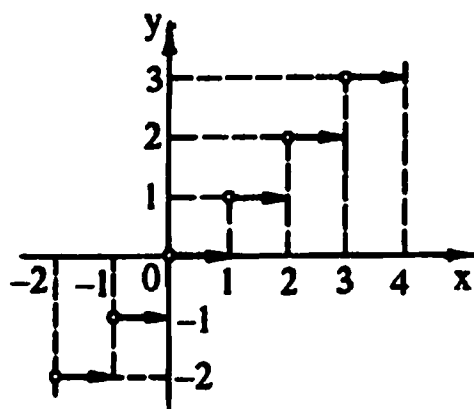


Рис. 3.10

3.3. Сложная и взаимно обратные функции

Нередко приходится сталкиваться с заданием либо описанием „функции от функции“, или, как говорят, **суперпозиции** (**наложения**) **функций**, называемой также **сложной функцией**. В этом случае **аргумент** u у функции $y = h(u)$ не является независимым переменным, а сам зависит от другого аргумента (положим, от аргумента x в виде зависимости $u = g(x)$). Тогда для задания зависимости y от x нужно вместо **промежуточного переменного** u подставить его выражение через x , записав $y = f(x) = h(g(x))$. Вместо такой записи иногда пишут $y = f(x) = h \circ g(x)$ и говорят о **композиции функций**.

При вычислении значения сложной функции сначала по значению x вычисляют значение промежуточного переменного u , а лишь затем — ее значение y . Функции $y = h(u)$ и $u = g(x)$ могут образовать суперпозицию $y = h(g(x))$, если только **пересечение области определения** первой из них с **областью значений** второй не является **пустым множеством**, т.е.

$D(h) \cap R(g) \neq \emptyset$. Областью определения $D(h \circ g)$ сложной функции является вся область определения функции $g(x)$, либо та ее часть, для которой значения $u = g(x)$ не выходят за пределы области определения функции $h(u)$.

Пример 3.4. а. Пусть $h(u) = 2u$, $u = g(x) = x^3 - 7$. Тогда $D(g) = \mathbb{R}$, $D(h) = R(g) = \mathbb{R}$ и $D(h) \cap R(g) = \mathbb{R}$. Следовательно, $D(h \circ g) = \mathbb{R} = D(g)$.

б. Если $h(u) = \sqrt{u}$ и $u = g(x) = \sin^2 x - 1$, то $D(g) = \mathbb{R}$, $R(g) = [-1, 0]$ и $D(h) = [0, +\infty)$. В этом случае имеем $D(h) \cap R(g) = \{0\}$ и потому

$$D(h \circ g) = \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\} = \{x = (2k + 1)\pi/2: k \in \mathbb{Z}\}.$$

в. Характер сложной функции связан не с особой природой зависимости y от x , а лишь со способом задания этой зависимости. Так, если $y = \sqrt{1 - u^2}$ и $u = \sin x$, $x \in X = [-\pi/2, \pi/2]$, то $y = \cos x$, т.е. функция $\cos x$, $x \in X$, оказалась заданной в виде сложной функции.

г. Соотношения $y = h(u) = \sqrt{u - 5}$ и $u = g(x) = \cos x$ не определяют сложную функцию, поскольку пересечение области определения функции $y = h(u)$ и области значений функции $u = g(x)$ является пустым множеством. #

Ясно, что сложная функция может быть суперпозицией более чем двух функций. Пусть, например, $y = \operatorname{tg} u$, $u = v^3$ и $v = \cos x$. Тогда $y = \operatorname{tg}(\cos x)^3$.

Пример 3.5. Пусть функция $Q(T)$ характеризует затраты теплоты на нагрев тела до температуры T и определена на полуинтервале $D(Q) = [T_1, T_2)$, а функция $T(t)$ задает зависимость изменения температуры тела от времени t и имеет область значений $R(T) = (T_0, T_*)$. Тогда сложная функция $Q(T(t)) = Q \circ T(t)$ описывает подводимого к телу количества теплоты от времени. Область определения $D(Q \circ T)$ сложной функции содержит лишь такие моменты времени t , для которых промежуточная переменная $T \in R(T) \cap D(Q)$.

обратную к $Q(T)$ и характеризующую изменение температуры тела в зависимости от количества подведенной к нему теплоты.

Пример 3.7. Областью определения функции $f(x) = x^2$ является вся числовая прямая \mathbb{R} . Эта функция не инъективна на \mathbb{R} , поскольку $f(x) = f(-x)$. Но если функцию f рассматривать только на множестве $X = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$, то получаем инъективную функцию. Обратная функция $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ определена на множестве $Y = f(X) = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$.

Ясно, что функция $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ также будет обратной к функции $f(x) = x^2$, рассматриваемой на множестве $X = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$. #

Заметим, что обозначение аргумента функции f буквой x , а аргумента функции f^{-1} буквой y целесообразно, но, разумеется, несущественно. По традиции, аргумент любой функции чаще обозначают буквой x .

Если функция $x = f^{-1}(y)$ является обратной к функции $y = f(x)$, то множество точек плоскости, определяющих график той и другой функции, одно и то же. Поэтому в этом случае говорят, что графики обеих функций совпадают. Но если потребовать, чтобы аргумент обратной функции был также обозначен буквой x , то надо вместо функции $x = f^{-1}(y)$ рассматривать функцию $y = f^{-1}(x)$. Теперь при традиционном расположении координатных осей (ось Ox горизонтальна, а ось Oy

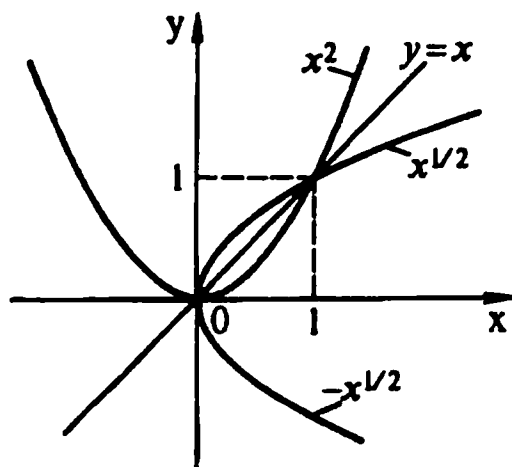


Рис. 3.12

вертикальна) графики взаимно обратных функций будут различными (один будет зеркальным отражением другого относительно биссектрисы $y = x$ 1-й и 3-й четверти координатной плоскости). Графики взаимно обратных функций, рассмотренных в примере 3.7, изображены на рис. 3.12.

3.4. Некоторые свойства функций

Периодические функции

Определение 3.3. *Периодом функции $f(x)$, определенной на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, называют действительное число $T > 0$, такое, что при любом $x \in X$ числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат множеству X и справедливо равенство*

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x). \quad (3.13)$$

Числа nT , где $n \in \mathbb{N}$ — любое натуральное число, также будут периодом такой функции. Покажем, например, что если T — период функции $f(x)$, то $2T$ также ее период. В самом деле, во-первых, $x \pm 2T = ((x \pm T) \pm T) \in X$ и, во-вторых, согласно (3.13),

$$f(x \pm 2T) = f(x \pm T \pm T) = f(x \pm T) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

В дальнейшем под периодом функции будем понимать наименьший из ее периодов.

Если функция $f(x)$ имеет период T , то функция $\varphi(x) = f(ax + b)$, где a и b — постоянные и $a > 0$, имеет период T/a . Действительно, с учетом (3.13)

$$\varphi(x + T/a) = f(a(x + T/a) + b) = f(ax + b + T) = f(ax + b) = \varphi(x).$$

Функцию, имеющую период, называют **периодической**.

Для построения графика функции $f(x)$ с периодом T , определенной на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, достаточно построить ее график на любом отрезке $[a, a + T] \subset X$, где $a \in X$ — некоторое число, и перенести его вдоль координатной оси Ox на $\pm T, \pm 2T, \dots$. На рис. 3.13 представлен график периодической функции $y = 2\sqrt{\sin x}$ с периодом $T = 2\pi$.

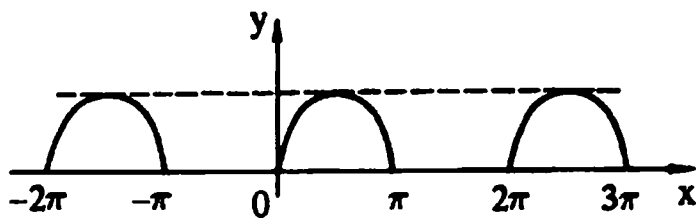


Рис. 3.13

Монотонные функции

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ и x_1 и x_2 — любые две точки этого множества, для которых выполнено неравенство $x_1 < x_2$. Функцию $f(x)$ называют на этом множестве

- 1) **возрастающей**, если $f(x_1) < f(x_2)$;
- 2) **неубывающей**, если $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- 3) **убывающей**, если $f(x_1) > f(x_2)$;
- 4) **невозрастающей**, если $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Во всех четырех случаях функцию называют **монотонной на множестве X** , причем в случаях 1) и 3) говорят, что функция **строго монотонна**, а в случаях 2) и 4) — просто монотонна. Ясно, что строго монотонная функция **инъективна** и поэтому существует **обратная к ней функция**, тоже строго монотонная.

Пример 3.8. Функции $y = x$ и $y = x^3$ являются возрастающими на всей числовой прямой \mathbb{R} , а функция $y = x^2$ — убывающей на интервале $(-\infty, 0)$ и возрастающей на интервале $(0, +\infty)$, но не является монотонной на любом интервале, содержащем точку $x = 0$. Функцию $y = c = \text{const}$, согласно определению, можно считать одновременно и неубывающей, и невозрастающей.

Четные и нечетные функции

Пусть функция $f(x)$ имеет область определения $D(f) = X \subseteq \mathbb{R}$, симметричную относительно точки O начала отсчета на числовой прямой \mathbb{R} (рис. 3.14), т.е. если $x \in X$, то и $-x \in X$. В общем случае $D(f)$ может быть объединением промежутков, попарно симметричных относительно точки $x = 0$, и не обязана содержать эту точку.

Определение 3.4. Функцию $f(x)$, определенную на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$, называют **четной**, если $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$, и **нечетной**, если $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy , а график нечетной функции — относительно начала координат (см. рис. 3.14). Для установления четности функции $f(x)$ следует проанализировать поведение функции $f(-x)$. Не всегда сразу видно, обладает ли функция свойством четности. Тогда используют тождественные преобразования $f(-x)$.

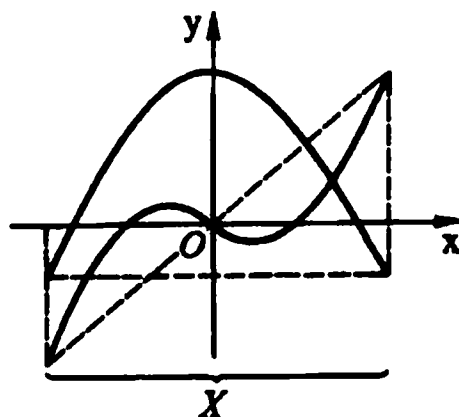


Рис. 3.14

Пример 3.9. Покажем, что функция

$$f(x) = \log_a \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

является нечетной. Действительно,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a \left(-x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \\ &= \log_a \frac{\left(-x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\log_a \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = -f(x). \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Любую функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций, и это представление единственно.

◀ Запишем

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ — четная функция, а $\psi(x)$ — нечетная. Тогда

$$f(-x) = \varphi(-x) + \psi(-x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

Складывая и вычитая записи для $f(x)$ и $f(-x)$, получаем

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{и} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

что доказывает возможность и единственность представления $f(x)$ в виде суммы четной и нечетной функций. ►

Отметим, что смена знака перед функцией не меняет ее четности, а при сложении только четных или только нечетных функций их сумма сохраняет свойство четности своих слагаемых. Произведение любого числа четных функций есть четная функция, а четность произведения нечетных функций зависит от четности числа сомножителей: при четном числе сомножителей имеем четную функцию, а при нечетном — нечетную.

Функцию, не обладающую свойством четности или нечетности, называют *функцией общего вида*.

Ограниченные функции

Определение 3.5. Функцию $f: X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ называют на множестве $D \subseteq X$:

а) *ограниченной сверху*, если множество

$$f(D) = \{f(x): x \in D\} \subseteq \mathbb{R}$$

значений функции как подмножество в \mathbb{R} ограничено сверху, т.е. существует константа $M \in \mathbb{R}$, такая, что $f(x) \leq M \forall x \in D$;

б) *ограниченной снизу*, если множество $f(D)$ ограничено снизу, т.е. существует константа $m \in \mathbb{R}$, такая, что $f(x) \geq m \forall x \in D$;

в) *ограниченной*, если существует константа $C > 0$, такая, что $|f(x)| \leq C \forall x \in D$.

Ясно, что функция будет ограниченной на множестве D в том и только в том случае, если она ограничена и сверху, и снизу. Если множество D совпадает с областью определения функции и она ограничена на этом множестве, то такую функцию называют просто *ограниченной*. Функцию, не являющуюся ограниченной на множестве D , называют *неограниченной на этом множестве*. Это означает, что

$\forall C > 0 \exists a \in D: |f(a)| > C$. Очевидно, что такая функция будет неограниченной на любом множестве, которое включает множество D .

Пример 3.10. а. Функция

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ограничена на множестве $D = \mathbb{R}$, так как $0 < f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Графиком этой функции (рис. 3.15, а) является кривая, называемая **локоном Анъези** по имени итальянского математика, профессора Болонского университета Марии Анъези (1718–1799).

б. Функция $g(x) = 1/x$ ограничена на **полуинтервале** $[1, +\infty)$, так как $0 < g(x) \leq 1 \quad \forall x \in [1, +\infty)$. Эта же функция не ограничена на интервале $(0, +\infty)$, поскольку $\forall M > 0 \exists a \in (0, +\infty): g(a) > M$ (рис. 3.15, б). На этом интервале данная функция является лишь ограниченной снизу.

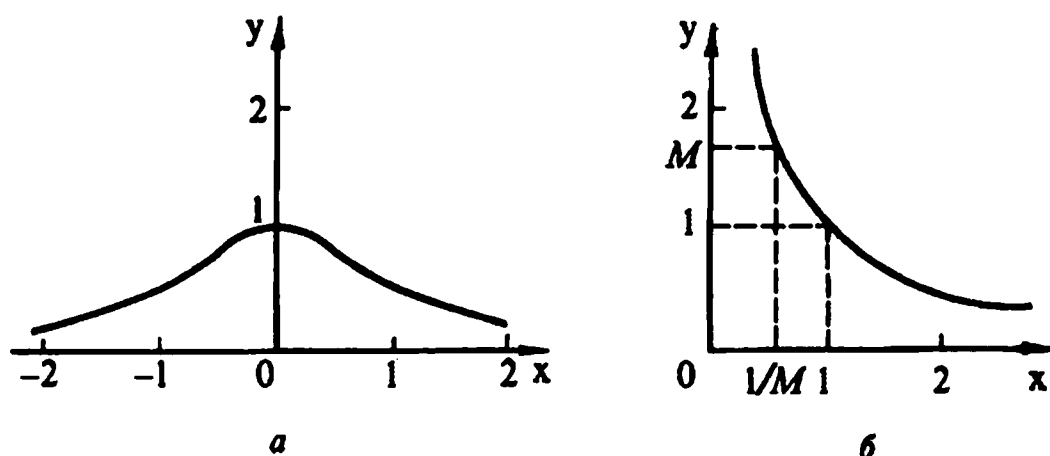


Рис. 3.15

3.5. Основные элементарные функции

Среди огромного числа **функций** в ходе развития математики постепенно была выделена небольшая совокупность сравнительно простых функций, особенно часто встречающихся в самых разнообразных приложениях математического анализа и потому подвергнутых наиболее подробному исследованию.

Функции, входящие в эту совокупность, называют **основными элементарными функциями**, хотя они и не имеют какого-либо общего принципиального признака. При изучении других, более сложных функций, как правило, широко используют уже известные свойства основных элементарных функций, большинство из которых рассматривают в школьном курсе математики. Поэтому ограничимся перечислением этих функций с небольшими комментариями.

Степенную функцию обозначают

$$y = x^s, \quad (3.14)$$

где $s \in \mathbb{R}$ — любое постоянное действительное число. Поведение этой функции существенно зависит от **показателя степени** s . Если $s \in \mathbb{Z}$, то (3.14) — **рациональная функция**. Если же $s = k/n \in \mathbb{Q}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, причем k и n не имеют общих делителей и поэтому несократимы), то

$$x^s = x^{k/n} = \sqrt[n]{x^k}. \quad (3.15)$$

Функцию (3.15) относят к **иррациональным функциям**. Вычислить ее значения уже не столь просто по сравнению со значениями рациональной функции. Еще труднее это сделать для функции (3.14), когда **иррационально** само число s (например, $s = \sqrt{2}$), но этот вопрос потребует специального рассмотрения.

Область определения $D(y)$ функции (3.14) также существенно зависит от **множества**, к которому принадлежит число s . Если $s \in \mathbb{N}$, то $D(y) = \mathbb{R}$. Если же s — **целое отрицательное число**, то $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, т.е. из числовой прямой следует исключить точку $x = 0$. В случае $s = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ $D(y) = \mathbb{R}$ при n нечетном и $D(y) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ при n четном. Теперь нетрудно установить, что при $s = k/n \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (k и n несократимы):

- 1) $D(y) = \mathbb{R}$, когда n нечетно и $k > 0$;
- 2) $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, когда n нечетно и $k < 0$;

3) $D(y) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$, когда n четно и $k > 0$;

4) $D(y) = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$, когда n четно и $k < 0$.

Случай иррационального s рассмотрен ниже (см. логарифмическую функцию).

Показательной называют функцию

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1. \quad (3.16)$$

Областью определения этой функции служит вся числовая прямая. Эта функция положительна, *монотонно возрастает*, если $a > 1$, и *монотонно убывает*, если $0 < a < 1$ (рис. 3.16). При любом $a > 0$ выполняется равенство $a^0 = 1$, но для произвольных значений x эту функцию

не удастся вычислить при помощи конечной последовательности алгебраических операций (сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень). Поэтому данную функцию относят к **неалгебраическим**, или **трансцендентным, функциям** (от латинского выражения quod al-

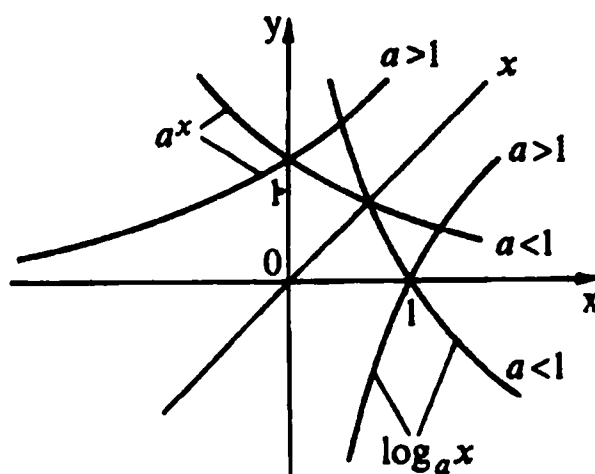


Рис. 3.16

gebrae vires transcendit — то, что превышает силы алгебры). Впервые термин „трансцендентный“ использовал Г. Лейбниц в 1686 г., а на функции этот термин в 1724 г. перенес И. Бернулли.

Логарифмическую функцию обозначают

$$y = \log_a x, \quad (3.17)$$

где a — постоянное положительное отличное от единицы число, и определяют как *обратную* по отношению к показательной функции. Это означает, что из (3.17) следует $x = a^y$, а подробнее: для любого числа $x > 0$ существует единственное число y ,

удовлетворяющее соотношению $a^y = x$. Именно это число y и называют логарифмом числа x по основанию a и обозначают $\log_a x$, так что

$$a^{\log_a x} = x.$$

Итак, знакомое из школьного курса **основное логарифмическое тождество**, по сути, является определением логарифмической функции (3.17). Ее область определения $D(y) = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$. Эта функция монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при $0 < a < 1$; ее **график** в любом случае проходит через точку $(1, 0)$ координатной плоскости и симметричен графику функции a^x относительно прямой $y = x$ (см. рис. 3.16). Поскольку

$$\log_a x = -\log_{1/a} x,$$

графики функций $\log_a x$ и $\log_{1/a} x$ симметричны относительно оси Ox .

Теперь общую степенную функцию (3.14) с любым действительным значением $s \in \mathbb{R}$ определим равенством

$$x^s = \left(a^{\log_a x}\right)^s = a^{s \log_a x}, \quad a \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Область определения показательной и область значений логарифмической функций совпадают (это вся числовая прямая). Поэтому область определения их **суперпозиции** совпадает с областью определения логарифмической функции, т.е. при $s \in \mathbb{R}$ $D(x^s) = (0, +\infty)$.

Из **тригонометрических функций** рассмотрим **синус** $\sin x$, **косинус** $\cos x$, **тангенс** $\operatorname{tg} x = (\sin x)/\cos x$ и **котангенс** $\operatorname{ctg} x = (\cos x)/\sin x$. Характерной чертой этих функций является то, что они **периодические**, причем $\sin x$ и $\cos x$ имеют **период** 2π (рис. 3.17), а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — период π (рис. 3.18). Областью определения для $\sin x$ и $\cos x$ служит

вся числовая прямая, причем $\cos x = \sin(x + \pi/2)$. Функция $\operatorname{tg} x$ определена всюду на \mathbf{R} , кроме точек $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, так как в них $\cos x = 0$, а функция $\operatorname{ctg} x$ — всюду на \mathbf{R} , кроме точек $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, поскольку в этих точках $\sin x = 0$. При этом $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x \pm \pi/2)$.

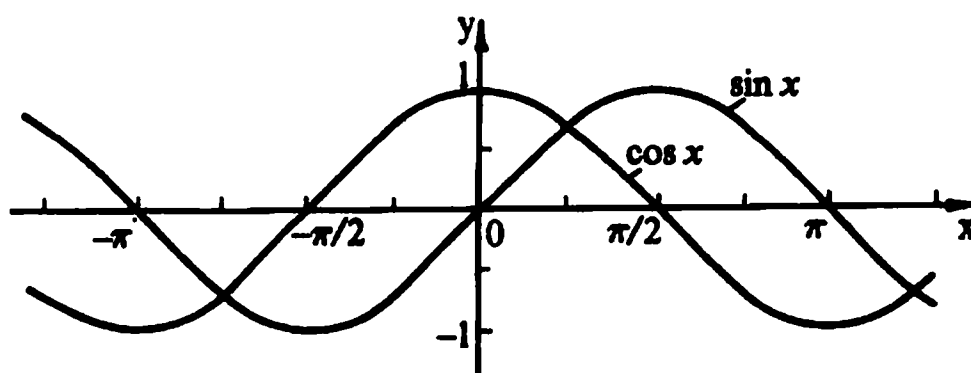


Рис. 3.17

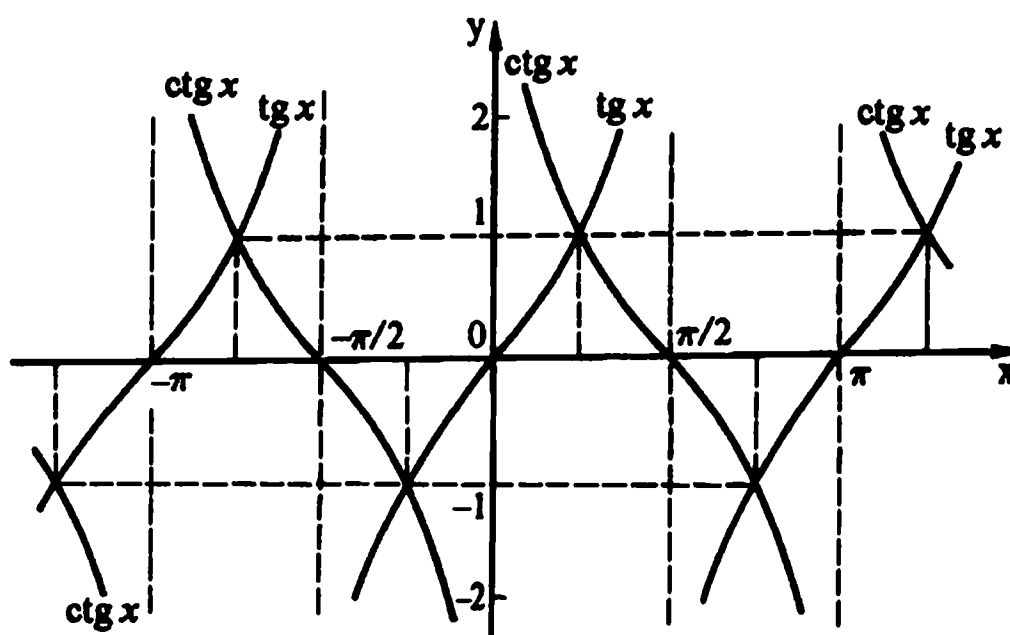


Рис. 3.18

К обратным тригонометрическим функциям отнесем $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$, называемые соответственно **арксинусом**, **арккосинусом**, **арктангенсом** и **арккотангенсом**. Напомним, что функция $\varphi(x)$ является обратной по отношению к данной функции $f(x)$, если из $y = \varphi(x)$ следует $x = f(y)$. Для функции a^x обратной является $\log_a x$. Но возможны случаи, когда данная функция имеет мно-

гозначную обратную функцию. Так, обратная функции $y = x^2$ имеет две однозначные ветви $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$, поскольку из этих двух соотношений одинаково следует $x = y^2$ (см. пример 3.7).

Для каждой из тригонометрических функций существует обратная, имеющая бесконечное множество однозначных ветвей. На любом отрезке $[-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, функция $\sin x$ строго монотонна, а значит, инъективна. Поэтому для каждого из таких отрезков существует обратная $\sin x$ функция. Иначе говоря, для $\sin x$ существует многозначная обратная функция, имеющая бесконечное множество однозначных ветвей. Ее обозначают $\operatorname{Arcsin} x$. Из этого множества однозначных ветвей выделяют одну, соответствующую отрезку $[-\pi/2, \pi/2]$, которую называют главным значением арксинуса x и обозначают $\arcsin x$. Ясно, что областью определения функции $\arcsin x$ является область значений $\sin x$, т.е. отрезок $[-1, 1]$, а областью значений — указанный выше отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$. Итак, $\arcsin x$ — это заключенный в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$ угол (в радианах), синус которого равен x . Тогда совокупность всех однозначных ветвей многозначной функции, обратной к $\sin x$, можно записать в виде

$$\operatorname{Arcsin} x = k\pi + (-1)^k \arcsin x, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

Аналогично вводят функции, обратные к другим тригонометрическим функциям. Например, $\arccos x$ — значение заключенного в $[0, \pi]$ угла, косинус которого равен x , причем совокупность всех однозначных ветвей многозначной функции, обратной к $\cos x$, записывают в виде $\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x$, $k \in \mathbb{Z}$. Запись $y = \operatorname{arctg} x$, по определению, означает, что $\operatorname{tg} y = x$ при $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Совокупность всех однозначных ветвей многозначной функции, обратной к $\operatorname{tg} x$, записывают в виде $\operatorname{Arctg} x = k\pi + \operatorname{arctg} x$, $k \in \mathbb{Z}$. Наконец, запись $y = \operatorname{arccctg} x$ означает, что $\operatorname{ctg} y = x$ при $y \in (0, \pi)$. Совокупность всех однозначных ветвей функции, обратной к $\operatorname{ctg} x$, записывают в

виде $\text{Arcctg } x = k\pi + \text{arctg } x$, $k \in \mathbb{Z}$. На рис. 3.19–3.22 приведены графики тригонометрических функций на выделенных промежутках и соответствующие им графики главных значений обратных тригонометрических функций.

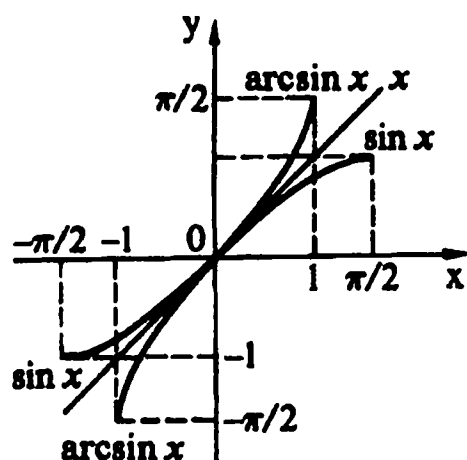


Рис. 3.19

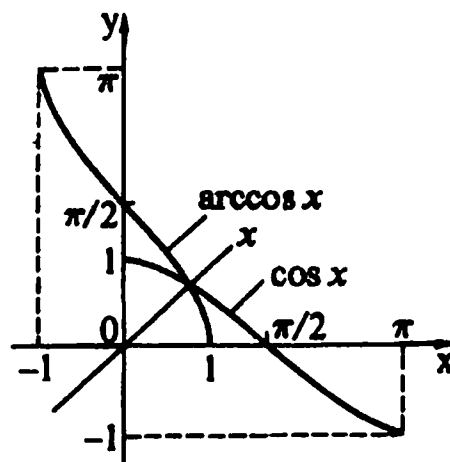


Рис. 3.20

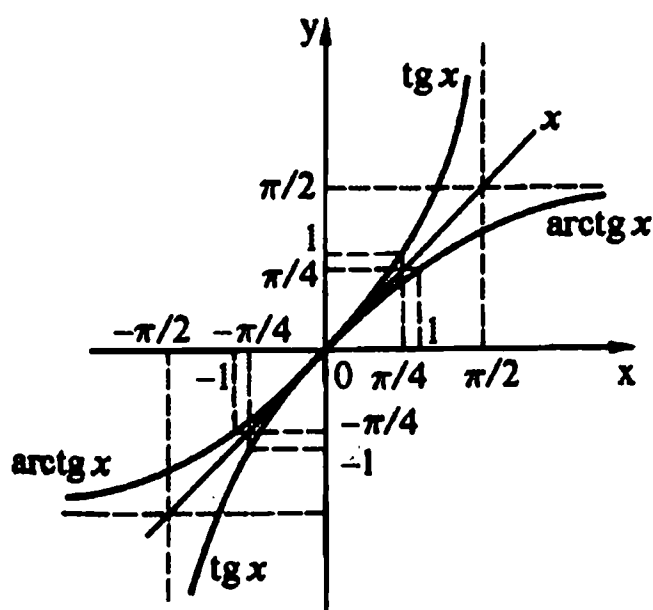


Рис. 3.21

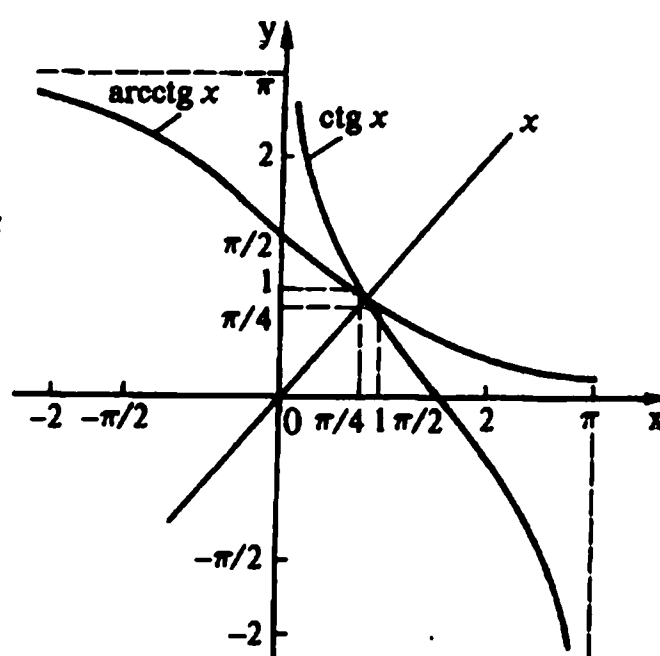


Рис. 3.22

3.6. Некоторые элементарные функции

К **элементарным** относят функции, которые можно получить при помощи конечного числа алгебраических операций над основными элементарными функциями и их суперпозицией.

В частности, такие операции над *степенной функцией*, показателем степени которой является *натуральное число*, дают *рациональную функцию*.

Рациональной функцией является *многочлен* вида

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad (3.19)$$

где $n \in \mathbb{N}$ — *степень многочлена* и $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ — его *коэффициенты*, причем $a_0 \neq 0$. Область определения многочлена (3.19), иногда называемого *полиномом*, — вся *числовая прямая*. Значение многочлена можно найти при помощи только арифметических операций (сложения, вычитания, умножения и возведения в целую положительную степень). Именно поэтому для изучения более сложных функций часто используют их представление (хотя бы приближенное) в виде многочлена.

Многочлен первой степени

$$P_1(x) = a_0x + a_1, \quad a_0 \neq 0,$$

(иначе, *бином*) является хорошо известной из школьного курса *линейной функцией*, которую иногда записывают в виде $y = kx + b$. Ее *графиком* будет *прямая* (см. рис. 3.1).

Многочлен второй степени

$$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad a_0 \neq 0,$$

часто называют *квадратным трехчленом* и обычно записывают в виде $y = ax^2 + bx + c$. Тожественными преобразованиями получим

$$y = a \left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + c = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

где $x_0 = -b/(2a)$ и $y_0 = c - b^2/(4a)$. График квадратного

трехчлена для случая $a > 0$, $x_0 > 0$ и $y_0 < 0$ представлен на рис. 3.23. Этот график можно получить сдвигом *параболы* $y = ax^2$ (см. рис. 3.1) вдоль оси Ox на x_0 вправо, если $x_0 > 0$, и влево, если $x_0 < 0$, вдоль оси Oy на y_0 вверх при $y_0 > 0$ и вниз при $y_0 < 0$.

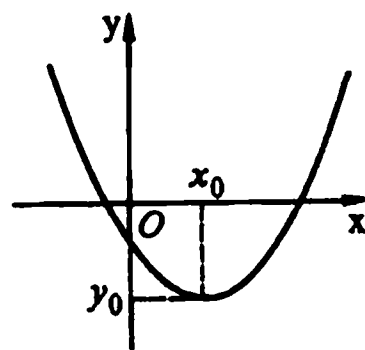


Рис. 3.23

К рациональным принадлежит и **дробно-рациональная функция**

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}, \quad (3.20)$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно. В частном случае, когда $P_m(x)$, как говорят, делится без остатка на $Q_n(x)$, рациональная функция сама будет многочленом. Поэтому часто многочлен вида (3.19) называют **целой рациональной функцией**. Рациональную функцию, не приводимую к многочлену, называют обычно **рациональной дробью**, причем при $m \geq n$ рациональную дробь именуют **неправильной**, а при $m < n$ — **правильной**.

Значение дробно-рациональной функции (подобно значению многочлена) нетрудно вычислить, но это возможно лишь для тех значений аргумента $x \in \mathbb{R}$, которые не являются **корнями уравнения** $Q_n(x) = 0$. Таким образом, областью определения дробно-рациональной функции (3.20) будет **множество \mathbb{R} всех действительных чисел за исключением множества нулей** многочлена $Q_n(x)$.

Широко используемым частным случаем (3.20) является **дробно-линейная функция**

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad c \neq 0.$$

Тождественными преобразованиями получим

$$y = \frac{a(x + d/c) + b - ad/c}{c(x + d/c)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(x + d/c)} = y_0 + \frac{h}{x - x_0}.$$

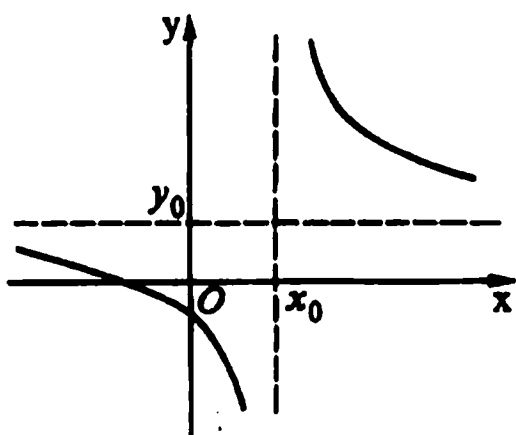


Рис. 3.24

Здесь $h = (bc - ad)/c^2$, $x_0 = -d/c$ и $y_0 = a/c$. Следовательно, графиком дробно-линейной функции будет гипербола $y = h/x$ (см. рис. 3.1), сдвинутая вдоль оси Ox на x_0 вправо, если $x_0 > 0$, и влево, если $x_0 < 0$, вдоль оси Oy — на y_0 вверх при $y_0 > 0$ и вниз при $y_0 < 0$. На рис. 3.24 график представлен для случая $h > 0$, $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$.

Итак, рациональные элементарные функции — это результат арифметических действий со степенной функцией (3.14) при $s = n \in \mathbb{N}$. Если же использовать степенную функцию вида (3.15), то получим **иррациональную функцию**. Рациональные и иррациональные функции образуют класс **алгебраических функций**. Элементарные функции, в которые входит хотя бы одна из **трансцендентных функций** (степенная вида (3.15) с иррациональным значением s , показательная, логарифмическая, тригонометрическая или обратная тригонометрическая), относят к классу трансцендентных. Функции Дирихле (3.1), знака $\operatorname{sgn} x$ (3.3), Хевисайда (3.4), абсолютного значения $|x|$ и целой части числа $[x]$ (см. 3.2) не являются элементарными.

Вопросы и задачи

3.1. Найти области определения функций, заданных формулами:

- а) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; б) $f(x) = \log_2 \sin x$;
 в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2}$; г) $f(x) = \log_2 \log_2 x$;
 д) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$; е) $f(x) = \log_3(x + 3)$;
 ж) $f(x) = \log_4(1 - 2\cos x)$; з) $f(x) = \arccos(1 - 2x)$.

Построить графики этих функций. Ограничены ли эти функции в своей области определения? Являются ли они монотонными?

3.2. Показать, что для функции Дирихле (3.1)

$$\varphi(x + m/n) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.3. Для $a, b \in \mathbb{R}$ при $a < b$ построить графики функций $\eta(x - a)$ и $\eta(x - a) + \eta(x - b)$, где $\eta(x)$ — единичная функция Хевисайда (3.4). Являются ли они монотонными?

3.4. Записать с помощью единичной функции Хевисайда (3.4) следующие функции (при условии $a < b < d$):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a, b], \\ a, & x \in [a, b]; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [a, d], \\ a, & x \in [a, b], \\ b, & x \in [b, d]. \end{cases}$$

3.5. Выяснить, в каком из следующих случаев композиция $g \circ f = g(f(x))$ заданных функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет область определения, не являющуюся пустым множеством:

- а) $f(x) = \lg x \quad \forall x \in (0, 1), \quad g(x) = \lg x \quad \forall x \in (0, +\infty)$;
- б) $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;
- в) $f(x) = \operatorname{tg} x \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2), \quad g(x) = 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3.6. Составить композиции $f \circ f = f(f(x))$, $f \circ g(x) = f(g(x))$, $g \circ f = g(f(x))$ и $g \circ g = g(g(x))$ и указать их области определения, если:

- а) $f(x) = 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_2 x \quad \forall x \in (0, +\infty)$;
- б) $f(x) = 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3.7. Построить графики композиций $f \circ g = f(g(x))$ и $g \circ f = g(f(x))$ функций $f(x) = x^2$ и $g(x) = [x]$ (целая часть числа). Будут ли сложные функции ограниченными, монотонными?

3.8. Установить, какие из перечисленных ниже функций имеют обратные, найти соответствующие обратные функции и их области определения, построить графики:

- а) $f(x) = ax + b$; б) $f(x) = (x - 1)^3$; в) $f(x) = \ln 2x$;
- г) $f(x) = 2^{x/2}$; д) $f(x) = \cos 2x$;
- е) $f(x) = (1 - x)/(1 + x)$; ж) $f(x) = x^2 + 1$.

Монотонны ли исходные функции и обратные к ним?

3.9. Найти обратную функцию и область ее определения, если исходная функция задана на указанном промежутке:

$$f(x) = x^2 - 1: \quad \text{а) } x \in [1/2, +\infty); \quad \text{б) } x \in (-\infty, -1/2];$$

$$f(x) = \sin x: \quad \text{а) } x \in [-\pi/2, \pi/2]; \quad \text{б) } x \in [\pi/2, 3\pi/2];$$

$$f(x) = \cos^2 x: \quad \text{а) } x \in [0, \pi/2]; \quad \text{б) } x \in [\pi/2, \pi]; \quad \text{в) } x \in [\pi, 3\pi/2];$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0), \\ 2x, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Построить графики этих функций. Монотонны ли исходные функции и обратные к ним?

3.10. Найти композиции $f \circ g$ и $g \circ f$ следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x};$$

$$\text{б) } f(x) = \sin x \quad (x \in [-\pi, \pi]), \quad g(x) = \arcsin x;$$

$$\text{в) } f(x) = 1 - x, \quad g(x) = x^2;$$

$$\text{г) } f(x) = g(x) = x/\sqrt{1+x^2};$$

$$\text{д) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0], \\ x, & x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ -x^2, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Построить графики исходных функций и композиций. Что можно сказать о монотонности и ограниченности этих функций?

3.11. Найти композиции $f \circ f \circ f$ функции f , если:

$$\text{а) } f(x) = 1/(1-x); \quad \text{б) } f(x) = x/\sqrt{1+x^2}.$$

Построить графики исходных функций и композиций. Что можно сказать о монотонности и ограниченности этих функций?

3.12. Построить графики функций, заданных параметрически:

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2];$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = t/\sqrt{1+t^2}, \\ y = 1/\sqrt{1+t^2}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Являются ли они ограниченными, монотонными?

3.13. Являются ли периодическими функции:

а) $\sin x + \cos(x/2) + 1$; б) $\sin^2 x + \operatorname{tg} x$; в) сумма единичной функции Хевисайда и целой части числа?

3.14. Приведите примеры и постройте графики периодических функций с периодами: а) $T = 1$; б) $T = 1/2$; в) $T = 3$.

3.15. Определены композиции $f \circ g = f(g(x))$ и $g \circ f = g(f(x))$. Будут ли они периодическими функциями, если $f(x)$ периодическая?

3.16. Показать, что если функция f периодическая с периодом T , то f^2 также периодическая функция с периодом $T_1 \leq T$. Привести пример функции f , когда $T_1 < T$.

3.17. Функции f и g периодические с ненулевыми периодами T_f и T_g . Показать, что если $T_f, T_g \in \mathbb{Q}$, то функция $f + g$ периодическая. Каков ее период?

3.18. Выяснить четность определенных на \mathbb{R} функций:

а) $\cos x + \sin^2 x$; б) $x^3 + \sin x$; в) $2^{x^2} + x$.

3.19. Может ли монотонная на \mathbb{R} функция быть четной или нечетной?

3.20. Указать определенную на \mathbb{R} функцию $f(x)$, такую, что функция $\sin f(x)$ монотонна на \mathbb{R} .

3.21. Найти функцию, обратную к дробно-линейной. При каком условии эти функции совпадают?

3.22. Найти функцию, обратную к $x + [x]$, и построить ее график.

3.23. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.

4. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ КОМПОЗИЦИИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

4.1. Законы композиции

На практике обычно используют *множества*, над *элементами* которых могут быть выполнены определенные операции, или, как говорят, на множестве заданы внутренние законы композиции.

Определение 4.1. На множестве E задан *внутренний бинарный закон композиции* τ , если каждому двум элементам $a, b \in E$ поставлен в соответствие элемент $c \in E$, называемый *композицией* этих элементов и обозначаемый $c = a \tau b$.

Иначе говоря, внутренним бинарным законом композиции τ на множестве E называют *отображение* множества $E \times E$ в E .

Пример 4.1. а. На множестве \mathbb{R} *действительных чисел* сложение и умножение являются внутренними бинарными законами композиции, обозначаемыми $a + b$ и $a \cdot b$ соответственно (умножение обозначают также $a \times b$ или просто ab).

б. На множестве $P(Y)$ всех *подмножеств* некоторого множества Y бинарными законами композиции будут операции *объединения* и *пересечения*. #

Полезными для использования являются те законы композиции, которые обладают определенными свойствами.

Определение 4.2. Бинарный закон композиции τ на множестве E называют *ассоциативным*, если

$$\forall a, b, c \in E \quad a \tau (b \tau c) = (a \tau b) \tau c.$$

Пример 4.2. а. На множестве \mathbb{N} натуральных чисел сложение и умножение являются ассоциативными законами композиции.

б. На том же множестве \mathbb{N} возведение в целую положительную степень неассоциативно, так как в общем случае

$$(a^b)^c \neq a^{b^c}.$$

Так, например, $(2^3)^4 = 8^4 = 2^{12}$, а $2^{3^4} = 2^{81}$.

Замечание 4.1. Если закон ассоциативен, то можно по индукции определить композицию конечной последовательности элементов

$$a_1 \tau a_2 \tau a_3 \tau \dots \tau a_n = \tau_{i=1}^n a_i, \quad \text{или} \quad \tau_{i \in J} a_i, \quad J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Определение 4.3. Бинарный закон композиции τ на множестве E называют **коммутативным**, если

$$\forall a, b \in E \quad a \tau b = b \tau a.$$

Пример 4.3. а. На множестве \mathbb{N} сложение и умножение являются коммутативными законами.

б. На том же множестве возведение в степень не будет коммутативным законом, так как в общем случае

$$a^b \neq b^a.$$

Определение 4.4. Элемент $a \in E$ называют **регулярным** относительно закона τ , если

$$\forall x, y \in E \quad (a \tau x = a \tau y) \wedge (x \tau a = y \tau a) \Rightarrow x = y.$$

Пример 4.4. а. На множестве \mathbb{N} всякий элемент регулярен относительно закона сложения и умножения.

б. На множестве \mathbb{Z} целых чисел элемент 0 не регулярен относительно умножения (например, $0 \cdot 3 = 0 \cdot 8$, но $3 \neq 8$).

Замечание 4.2. Регулярность элемента дает возможность сокращать на него. Например, выражение $a \tau x = a \tau y$ в случае регулярности элемента a может быть записано как $x = y$. Различают регулярность слева, когда $a \tau x = a \tau y$ можно сократить на a , и регулярность справа, когда $x \tau a = y \tau a$ также влечет $x = y$. Очевидно, что элемент a регулярен относительно закона τ тогда и только тогда, когда он регулярен справа и слева одновременно.

Определение 4.5. *Нейтральным элементом* относительно бинарного закона композиции τ на множестве E называют такой элемент $e \in E$, что

$$\forall x \in E \quad x \tau e = e \tau x = x.$$

Если такой элемент существует, то он единственный. Действительно, предположим, что существуют два нейтральных элемента e и e' . Тогда имеем $e = e' \tau e = e \tau e' = e'$.

Нейтральный элемент является регулярным.

Пример 4.5. а. На множестве \mathbb{R} действительных чисел 0 — нейтральный элемент относительно сложения; 1 — относительно умножения.

б. На множестве $P(E)$ всех подмножеств множества E пустое множество является нейтральным элементом относительно объединения, основное множество E — относительно пересечения, так как

$$\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A, \quad A \cap E = E \cap A = A \quad \forall A \in P(E).$$

Определение 4.6. Пусть внутренний бинарный закон τ задан на множестве E , имеющем нейтральный элемент e . *Симметричным* к элементу $x \in E$ (иногда говорят: *обратным, противоположным*) называют такой элемент $x' \in E$, что $x \tau x' = x' \tau x = e$. В этом случае x называют *симметризуемым элементом*.

Пример 4.6. а. На множестве \mathbf{R} симметричным к некоторому числу x при сложении будет то же число, взятое с обратным знаком.

б. При умножении на множестве \mathbf{Q} рациональных чисел симметричным относительно $x \neq 0$ будет $1/x$. #

Для множества E , обладающего нейтральным элементом e относительно внутреннего бинарного закона композиции τ , справедливы следующие две теоремы.

Теорема 4.1. Если τ — ассоциативный закон и x — симметризуемый элемент, то он обязательно регулярен относительно τ и имеет единственный симметричный элемент.

◀ Предположим, что в множестве E существуют два симметричных относительно x элемента x' и x'' . Тогда, согласно определениям 4.2, 4.5 и 4.6, имеем

$$x' = x' \tau e = x' \tau (x \tau x'') = (x' \tau x) \tau x'' = e \tau x'' = x'',$$

т.е. симметричный относительно x элемент — единственный.

Для обоснования регулярности симметризуемого элемента x предположим, что $x \tau a = x \tau b$. Тогда

$$x' \tau (x \tau a) = x' \tau (x \tau b)$$

и, используя свойство ассоциативности τ , получаем $(x' \tau x) \tau a = (x' \tau x) \tau b$, или, согласно определениям 4.6 и 4.5, $e \tau a = e \tau b$ и $a = b$, т.е., по определению 4.4, элемент x регулярен относительно τ . ►

Теорема 4.2. Если τ — ассоциативный закон, а x, y — симметризуемые элементы, то $x \tau y$ также симметризуемый элемент.

◀ Если x' — симметричный элемент для x , а y' — для y , то $y' \tau x'$ будет симметричным для $x \tau y$, так как в силу ассоциативности

$$(x \tau y) \tau (y' \tau x') = x \tau (y \tau y') \tau x' = x \tau x' = e$$

и

$$(y' \tau x') \tau (x \tau y) = y' \tau (x' \tau x) \tau y = y \tau y' = e,$$

что соответствует определению 4.6. ►

Определение 4.7. Пусть на множестве E заданы два внутренних бинарных закона композиции τ и \perp . Говорят, что τ **дистрибутивен** относительно \perp , если $\forall x, y, z \in E$

$$(x \perp y) \tau z = (x \tau y) \perp (y \tau z) \quad \text{и} \quad z \tau (x \perp y) = (z \tau x) \perp (z \tau y).$$

Пример 4.7. а. На множестве \mathbb{Z} умножение дистрибутивно относительно сложения, т.е.

$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{и} \quad c(a + b) = ca + cb.$$

б. На том же множестве \mathbb{Z} сложение не является дистрибутивным относительно умножения, так как

$$(ab) + c \neq (a + c)(b + c).$$

в. На множестве $P(E)$ всех подмножеств множества E пересечение и объединение, согласно свойствам этих операций, взаимно дистрибутивны относительно друг друга.

Замечание 4.3. Если в определении 4.7 выполнено лишь первое соотношение, то говорят о дистрибутивности τ относительно \perp только справа, а если выполнено лишь второе — о дистрибутивности τ относительно \perp только слева. Так, на множестве \mathbb{N} возведение в степень относительно умножения дистрибутивно только справа: $(xy)^z = x^z y^z$, однако при $z \neq 1$ и $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad z^{xy} \neq z^x z^y$.

Определение 4.8. Если в подмножестве $F \subset E$ множества E композиция любых двух элементов из F также принадлежит F , то F называют **замкнутым** относительно рассматриваемого закона τ на E , или **устойчивым подмножеством** множества E относительно закона τ .

В этом случае говорят, что на подмножестве F определен **индуцированный на F законом τ внутренний закон композиции τ_F** .

Пример 4.8. а. Множество B четных чисел является замкнутым подмножеством относительно сложения и умножения на множестве N натуральных чисел.

б. Множество E^* регулярных элементов множества E , снабженного ассоциативным законом τ , устойчиво относительно τ , так как если два элемента множества E регулярны, то и их композиция регулярна.

в. Множество E^{**} симметризуемых элементов множества E , снабженного ассоциативным законом τ , устойчиво относительно этого закона.

Определение 4.9. Пусть дано множество F , снабженное законом τ_F . Если существует множество $H \supset F$, снабженное законом τ_H , таким, что τ_F совпадает с законом, индуцированным на F законом τ_H , то H называют **расширением множества F** , а закон τ_H — **распространением на H закона τ_F** , определенного на F , или говорят, что F вложено в H .

Надо сказать, что не так уж много законов композиции приносят ощутимую практическую пользу. Для наиболее распространенных используют аддитивную и мультипликативную формы записи. В аддитивной форме записи закона композицию двух элементов a и b обозначают $c = a + b$, нейтральный элемент (в тех случаях, когда это не вызывает путаницы) часто обозначают 0 , симметричный относительно a обозначают $-a$.

Если для закона композиции τ используют такие обозначения, то τ , как правило, называют **аддитивным законом композиции**. В мультипликативной форме записи закона композицию элементов обозначают $c = a * b$ (или $c = ab$), нейтральный и симметричный элементы соответственно 1 и a^{-1} (в тех

случаях, когда это не приводит к путанице). При таком обозначении сам закон τ называют **мультипликативным**.

4.2. Основные алгебраические структуры

В зависимости от того, определен ли на множестве только один закон композиции (аддитивный или мультипликативный) или оба, а также от того, какими свойствами эти законы обладают, множества имеют одно из специальных названий: **полугруппа, группа, кольцо, тело, поле**. Все эти множества относят к **основным алгебраическим структурам** (иногда их также называют **алгебраическими системами**). В нашу задачу не входит подробное знакомство с этими структурами; ограничимся лишь их классификацией и рассмотрением наиболее часто используемых в дальнейшем примеров (табл. 4.1). При этом если на множестве определены два закона композиции, то второй закон дистрибутивен относительно первого, а нейтральный элемент относительно первого закона не имеет симметричного элемента относительно второго закона.

Отметим, что в эту таблицу включены лишь наиболее употребительные на практике алгебраические структуры. Этот минимум информации, несомненно, принесет пользу читателю, повысит его эрудицию, будет способствовать пониманию дальнейшего материала, поможет работе с научной литературой. Более подробную информацию о представленных в таблице алгебраических структурах можно найти в литературе по теории групп, теории колец и т.п.

В табл. 4.1 обозначено:

- n — число законов, заданных на множестве;
- A — свойство ассоциативности рассматриваемого закона композиции;
- K — свойство коммутативности;
- N — нейтральный элемент;

S — симметричный (обратный, противоположный) элемент;

$\#$ — наличие указанного свойства или элемента.

Таблица 4.1

Классификация алгебраических структур

n	Алгебраическая структура	I закон – аддитивный				II закон – мультипликативный			
		A	K	H	C	A	K	H	C
1	Полугруппа (аддитивная)	#							
1	Полугруппа (мультипликативная)					#			
1	Полугруппа (аддитивная с нулем)	#		#					
1	Полугруппа (мультипликативная с единицей)					#		#	
1	Группа (аддитивная)	#		#	#				
1	Группа (мультипликативная)					#		#	#
1	Абелева группа (аддитивная)	#	#	#	#				
1	Абелева группа (мультипликативная)					#	#	#	#
2	Ассоциативное кольцо	#	#	#	#	#			
2	Ассоциативное кольцо (с единицей)	#	#	#	#	#		#	
2	Абелево кольцо	#	#	#	#	#	#		
2	Абелево кольцо (с единицей)	#	#	#	#	#	#	#	
2	Тело	#	#	#	#	#		#	#
2	Поле	#	#	#	#	#	#	#	#

Пример 4.9. а. Множество \mathbf{R} действительных чисел образует поле.

б. Множество \mathbf{Z} целых чисел образует абелеву группу относительно сложения, а также абелево кольцо с единицей. Относительно умножения множество \mathbf{Z} не является группой, хотя нейтральный элемент (единица) существует, но для произвольного целого числа обратное число не является целым.

в. Множество \mathbf{Q}_+ положительных рациональных чисел и множество \mathbf{R}_+ положительных действительных чисел — примеры абелевых групп относительно умножения (с нейтральным элементом — единицей).

г. Рассмотрим множество $G = \{a, b, c\}$ с внутренним законом композиции τ , действующим согласно таблице

τ	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Из приведенной таблицы ясно, что

1) закон τ ассоциативен, поскольку $a\tau(b\tau c) = (a\tau b)\tau c$ и т.д.;

2) относительно этого закона существует нейтральный элемент, им является элемент c ;

3) для каждого элемента $x \in G$ существует симметричный: для a им будет элемент b (т.е. $a' = b$), для b , наоборот, a ($b' = a$), для c — сам элемент c ($c' = c$);

4) закон τ является коммутативным, так как таблица симметрична относительно главной диагонали, проходящей через верхнюю левую и нижнюю правую клетки таблицы. #

Остановимся более подробно на нескольких часто используемых алгебраических структурах.

4.3. Поле комплексных чисел

Рассмотрим множество \mathbb{R}^2 всевозможных упорядоченных пар (x, y) действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$. Для таких пар $(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Введем на этом множестве \mathbb{R}^2 внутренние законы композиции в виде операций сложения и умножения.

Сложение определим равенством

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \quad (4.1)$$

Эта операция ассоциативна и коммутативна; она обладает (в соответствии с определением 4.5) нейтральным элементом $(0, 0)$, и, по определению 4.6, для каждой пары (a, b) можно указать симметричный (противоположный) элемент $(-a, -b)$. Действительно, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} (a, b) + (0, 0) &= (0, 0) + (a, b) = (a, b), \\ (a, b) + (-a, -b) &= (-a, -b) + (a, b) = (0, 0). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$(a, b) = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a + 0, 0 + b),$$

или

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b). \quad (4.2)$$

Умножение определим равенством

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (4.3)$$

Легко проверить, что введенная таким образом операция ассоциативна, коммутативна и относительно сложения дистрибутивна. Эта операция обладает нейтральным элементом, которым является пара $(1, 0)$, поскольку

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b).$$

Итак, относительно введенных операций сложения и умножения множество \mathbb{R}^2 является абелевым кольцом с единицей (см. табл. 4.1).

Между множеством пар $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ и множеством действительных чисел $x \in \mathbb{R}$ нетрудно установить взаимно однозначное соответствие $(x, 0) \leftrightarrow x$, из которого следует, что

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) \leftrightarrow x_1 + x_2 \quad \text{и} \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) \leftrightarrow x_1 x_2,$$

т.е. сложение и умножение таких пар выполняются так же, как и действительных чисел. Заменим пары вида $(x, 0)$ действительными числами, т.е. вместо $(x, 0)$ будем писать просто x , в частности вместо $(1, 0)$ — просто 1.

Особое место в множестве \mathbb{R}^2 занимает пара $(0, 1)$. Согласно (4.3) она обладает свойствами

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1, \quad (y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y)$$

и получила специальное обозначение i , причем

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Тогда с учетом (4.2) и (4.3) любую пару $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ можно представить в виде

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy.$$

Обозначим $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$. Элемент \bar{z} называют **комплексно сопряженным** элементу z . С учетом (4.3)

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Если z не совпадает с нейтральным элементом $(0, 0)$, т.е. если x и y не равны 0 одновременно (обозначают $z \neq 0$), то $x^2 + y^2 \neq 0$. Тогда обратным (симметричным, противоположным относительно операции умножения — см. 4.1) к элементу $z = x + iy$ будет такой элемент z^{-1} , что $zz^{-1} = 1$ или $\bar{z}zz^{-1} = \bar{z}$, т.е.

$$(x^2 + y^2)z^{-1} = x - iy.$$

Отсюда

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (4.4)$$

Следовательно, всякий элемент $z \neq 0$ имеет обратный к себе относительно операции умножения, а множество \mathbb{R}^2 с введенными на нем в соответствии с (4.1) и (4.3) операциями сложения и умножения является, таким образом, *полем* (см. табл. 4.1). Его называют *полем* (или *множеством*) *комплексных чисел* и обозначают \mathbb{C} . В силу указанного выше взаимно однозначного соответствия

$$(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

поле комплексных чисел является расширением поля действительных чисел.

Любой элемент $z \in \mathbb{C}$ называют *комплексным числом*, а его запись в виде $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$ и $i^2 = -1$, — *алгебраической формой представления* комплексного числа. При этом x называют *действительной частью* комплексного числа и обозначают $\operatorname{Re} z$, а y — *мнимой частью* и обозначают $\operatorname{Im} z$ (i именуют *мнимой единицей*). Заметим, что мнимая часть комплексного числа есть действительное число.

Название для y не совсем удачно, но как дань исторической традиции осталось и по сей день. Термин „комплексное число“ ввел в 1803 г. французский математик Л. Карно (1753–1823), но систематически этот термин стал употреблять с 1828 г. К. Гаусс, чтобы заменить им менее удачное „мнимое число“. В русской математической литературе XIX в. использовали термин „составное число“. Уже у Р. Декарта противопоставлены действительная и мнимая части комплексного числа. В дальнейшем первые буквы французских слов *reelle* (действительный) и *imaginaire* (мнимый) стали обозначениями этих частей, хотя многие математики считали сущность мнимых величин неясной и даже загадочной и мистической. Так, И. Ньютон не включал их в понятие числа, а Г. Лейбницу принадлежит фраза: „Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием“.

Поскольку множество \mathbb{R}^2 всевозможных пар действительных чисел можно отождествить с точками на плоскости, ка-

ждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует точка $M(x, y)$ (рис. 4.1), что позволяет говорить о **геометрической форме представления** комплексного числа. При отождествлении комплексных чисел с точками плоскости ее называют **комплексной плоскостью**, или **плоскостью комплексных чисел**.

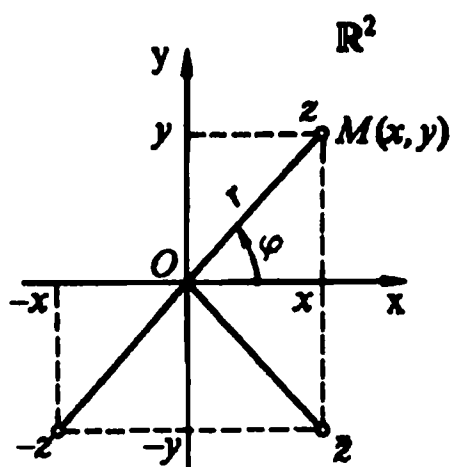


Рис. 4.1

На оси Ox располагают действительные числа, т.е. числа z , для которых $\text{Im } z = y = 0$, а на оси Oy — числа $z = iy$, называемые **чисто мнимыми**, для которых $\text{Re } z = x = 0$. Поэтому **координатные оси** в комплексной

плоскости называют соответственно **действительной** и **мнимой**. Точки плоскости, отвечающие комплексно сопряженным элементам z и \bar{z} (**комплексно сопряженным числам**), симметричны относительно действительной оси, а точки, изображающие z и $-z$, симметричны относительно начала координат.

Расстояние

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.5)$$

точки $M(x, y)$, изображающей комплексное число $z = x + iy$ на плоскости, от **начала координат** называют **модулем комплексного числа** и обозначают $|z|$ или r . Угол, который образует радиус-вектор точки M с положительным направлением оси Ox , называют **аргументом комплексного числа** и обозначают $\text{Arg } z$ или φ (см. рис. 4.1). Отсчет угла производят как в тригонометрии: положительным направлением изменения угла φ считают направление против часовой стрелки. Ясно, что $\text{Arg } z$ определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π . Единственное значение аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$ (иногда $0 \leq \varphi < 2\pi$), называют **главным** и обозначают $\arg z$. Таким образом,

$$\text{Arg } z = \arg z + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Для $z = 0$ значение $\text{Arg} z$ не определено. Соответствующую этому числу точку (начало координат) характеризуют лишь условием $|z| = r = 0$.

Итак, каждому комплексному числу z на комплексной плоскости отвечает радиус-вектор точки $M(x, y)$, которую можно задать ее **полярными координатами**: **полярным радиусом** $r \geq 0$, равным модулю комплексного числа, и **полярным углом** φ , совпадающим с главным значением аргумента этого комплексного числа.

Согласно известным из школьного курса тригонометрии определениям *тригонометрических функций* и *обратных* к ним (см. 3.5), при любом расположении точки z на комплексной плоскости имеем

$$x = r \cos \varphi = |z| \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi = |z| \sin \varphi, \quad \text{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (4.6)$$

С учетом ограничений, налагаемых на главное значение аргумента комплексного числа, получим

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0 \text{ и } y \geq 0; \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0 \text{ и } y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0 \text{ и } y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0 \text{ и } y < 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Из (4.6) следует, что правомерна запись

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (4.8)$$

называемая **тригонометрической формой представления** комплексного числа. Для перехода от алгебраической

формы представления к тригонометрической используют (4.5) и (4.7), а для обратного перехода — (4.6). Отметим, что два отличных от нуля комплексных числа равны тогда и только тогда, когда модули их равны, а аргументы отличаются на слагаемые, кратные 2π .

Согласно (4.1) **суммой комплексных чисел** z_1 и z_2 будет комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

а их **разностью** —

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

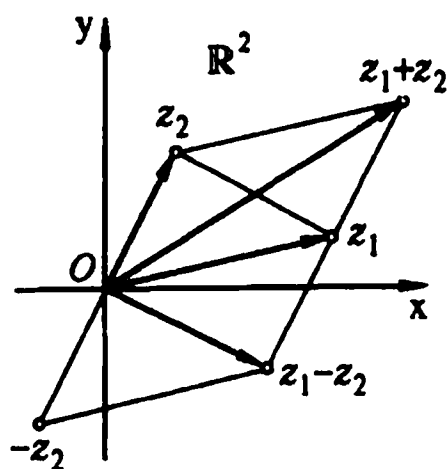


Рис. 4.2

Из этих формул следует, что сложение (или вычитание) комплексных чисел аналогично сложению (или вычитанию) векторов в комплексной плоскости по правилу параллелограмма (рис. 4.2) (при этом соответствующие координаты векторов складывают или вычитают). Поэтому для модулей комплексных чисел справедливы **неравенства треугольника** в виде

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{или} \quad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (4.9)$$

(длина любой стороны треугольника не больше суммы длин двух его других сторон). Однако этим аналогия между комплексными числами и векторами исчерпывается. Сумма или разность комплексных чисел может быть действительным числом (например, сумма комплексно сопряженных чисел $z + \bar{z} = 2x$, $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$).

Согласно (4.3) **произведением комплексных чисел** z_1 и z_2 будет комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление числа z_1 на $z_2 \neq 0$ вводят как действие, обратное умножению, т.е. под **частным** z_1/z_2 при $\forall z_2 \neq 0$ понимают комплексное число z , удовлетворяющее равенству $z_2 z = z_1$. После умножения обеих частей этого равенства на \bar{z}_2 , получим

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (4.10)$$

Возведение комплексного числа z в степень $n \in \mathbb{N}$ является умножением z на себя n раз с учетом того, что при $k \in \mathbb{N}$

$$i^n = \begin{cases} 1 & \forall n = 4k, \\ i & \forall n = 4k + 1, \\ -1 & \forall n = 4k + 2, \\ -i & \forall n = 4k + 3. \end{cases}$$

Тригонометрическая форма записи (4.8) дает возможность упростить умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел. Так, для $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ по (4.3) можно установить, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (4.11)$$

и в случае $z_2 \neq 0$ (а значит, и $r_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (4.12)$$

т.е.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg } z_1 z_2 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$$

и

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

На комплексной плоскости (рис. 4.3) умножению соответствует поворот отрезка OM на угол φ_2 (против часовой стрелки при $\varphi_2 > 0$) и изменение его длины в $r_2 = |z_2|$ раз, а делению — поворот этого отрезка на тот же угол по часовой стрелке и изменение его длины в $1/r_2 = 1/|z_2|$ раз.

Рассматривая возведение в степень $n \in \mathbb{N}$ как умножение z на себя n раз, получаем

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (4.13)$$

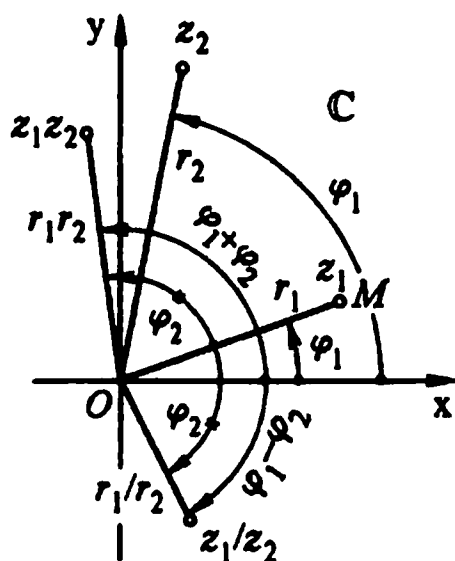


Рис. 4.3

В честь английского математика А. де Муавра (1667–1754) это соотношение называют **формулой Муавра возведения комплексного числа в целую положительную степень**. Возведение комплексного числа в рациональную степень $q = m/n$, $q \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, связано с возведением этого числа в степень $1/n$, или, как принято говорить, с извлечением корня n -й степени из комплексного числа.

Извлечение корня — это операция, обратная возведению в степень, т.е. $z^{1/n} = w$, если $w^n = z$. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $w = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Тогда из (4.13) имеем

$$\rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и, учитывая равенство комплексных чисел, получим

$$\rho^n = r \quad \text{и} \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\vartheta = (\varphi + 2k\pi)/n$ и

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (4.14)$$

Из выражения (4.14), называемого **формулой Муавра извлечения корня целой положительной степени из комплексного числа**, следует, что среди возможных значений $\sqrt[n]{z}$ различными будут n значений, соответствующих $k = \overline{0, n-1}$. Все n различных значений для $\sqrt[n]{z}$ имеют один и

тот же модуль, а их аргументы отличаются на углы, кратные $2\pi/n$. Значениям $\sqrt[n]{z}$ отвечают точки комплексной плоскости в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат. При этом радиус-вектор одной из вершин образует с осью Ox угол φ/n .

Из (4.13) и (4.14) следует формула для возведения комплексного числа $z \neq 0$ в рациональную степень $q \in \mathbb{Q}$. Если $q = m/n$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, есть несократимая дробь, то

$$z^q = r^q \left(\cos \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{m\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (4.15)$$

Пример 4.10. Пусть $z_1 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$, $z_2 = \sqrt{3} + i$. Тогда, согласно (4.5), $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$. Анализируя действительные и мнимые части комплексных чисел z_1 и z_2 (рис. 4.4), с учетом (4.7) получаем

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

и

$$\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

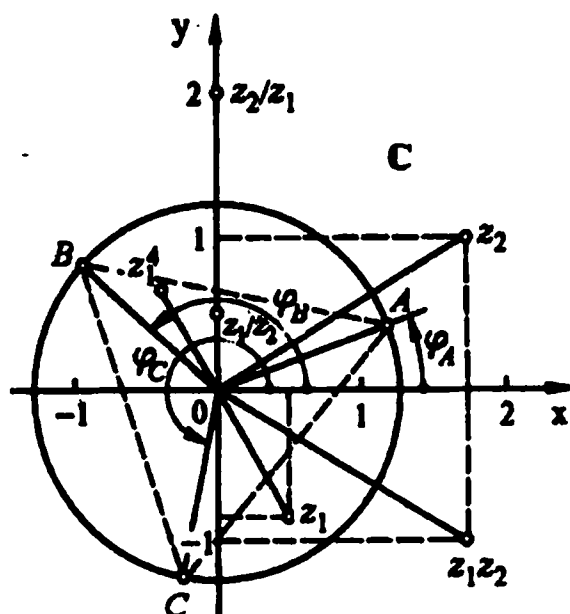


Рис. 4.4

Поэтому в тригонометрической форме

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Согласно (4.11) и (4.12) найдем:

$$z_1 z_2 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{3} - i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = -\frac{i}{2},$$

$$\frac{z_2}{z_1} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i.$$

Используя (4.13), возведем z_1 в степень $n = 4$

$$z_1^4 = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и, применив (4.14), извлечем из z_2 корень степени $n = 3$

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{-\pi/6 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi/6 + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Результаты вычислений приведены на рис. 4.4. Трем значениям корня третьей степени из z_2 соответствуют вершины правильного треугольника ABC , вписанного в окружность радиуса $\sqrt[3]{2}$, причем полярные углы этих вершин $\varphi_A = \pi/18$, $\varphi_B = 13\pi/18$ и $\varphi_C = 25\pi/18$ (или $\varphi_C = -11\pi/18$).

4.4. Кольцо многочленов

Рассмотрим *многочлен* вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Если коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n многочлена принадлежат множеству \mathbb{R} , причем $a_0 \neq 0$, то $P_n(x)$ носит название **многочлена над полем действительных чисел**. Меняя значения коэффициентов или степени n , получаем различные многочлены, отличающиеся друг от друга или коэффициентами, или степенью, или тем и другим и образующие некоторое множество.

Введем на множестве всевозможных многочленов обычные операции сложения и умножения алгебраических выражений с учетом действий над степенями и приведения подобных членов. Пусть, например,

$$P_3(x) = x^3 + x \quad \text{и} \quad P_4(x) = x^4 - x + 1.$$

Тогда

$$P_3(x) + P_4(x) = x^3 + x + x^4 - x + 1 = x^4 + x^3 + 1$$

и

$$P_3(x)P_4(x) = (x^3 + x)(x^4 - x + 1) = x^7 + x^5 - x^4 - x^2 + x^3 + x.$$

Введенные таким образом операции, очевидно, обладают свойствами *ассоциативности* и *коммутативности* и определяют *алгебраическую структуру* — **кольцо многочленов**, которое в соответствии с табл. 4.1 является абелевым кольцом с единицей. Роль *нейтрального элемента* относительно операции сложения выполняет нуль, относительно умножения — единица, а *противоположным* по отношению к операции сложения для любого элемента $P_n(x)$ является элемент $-P_n(x)$.

Минимум понятий и положений, связанных с многочленами, известен из школьного курса математики. Рассмотрим свойства кольца многочленов несколько подробнее. Два многочлена равны, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x . Пусть $F(x)$ и $G(x) \neq 0$ — многочлены. Если существует такой многочлен $S(x)$, что $F(x) = G(x)S(x)$, то говорят, что $F(x)$ делится на $G(x)$, причем $G(x)$ называют **делителем многочлена $F(x)$** , а $S(x)$ — частным от деления $F(x)$ на $G(x)$.

Теорема 4.3. Многочлен $P_n(x) - P_n(c)$ делится на $x - c$.

◀ Для доказательства необходимо показать, что существует такой многочлен

$$S(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1},$$

что

$$P_n(x) - P_n(c) = (x - c)S(x). \quad (4.16)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях (4.16), имеем $n + 1$ соотношений

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1 - b_0c, \quad a_2 = b_2 - b_1c, \quad \dots,$$

$$a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}c, \quad a_n - P_n(c) = -b_{n-1}c.$$

Отсюда из первых n соотношений однозначно находим коэффициенты

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + a_0c, \quad b_2 = a_2 + a_1c + a_0c^2, \quad \dots, \\ b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}c + \dots + a_2c^{n-2} + a_1c^{n-1} + a_0c^n,$$

что доказывает утверждение теоремы. ►

Из доказательства теоремы 4.3 следует, что формулы для коэффициентов частного от деления многочлена $P_n(x)$ на $x - c$ однотипны. Результаты вычислений по ним удобно записывать в виде таблицы

	a_0	a_1	a_2	a_3	\dots	a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	b_1	b_2	b_3	\dots	b_{n-1}	$P_n(c)$

Верхняя строка этой таблицы и значение c заданы, а нижнюю, начиная с b_1 , последовательно заполняют по формуле

$$b_i = a_i + b_{i-1}c, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Значение $P_n(c) = a_n + b_{n-1}c$ находят по той же формуле, определяющей *схему* (или *алгоритм*) *Горнера* (по имени английского математика У. Горнера (1786–1837)). В этой схеме наряду с $n+1$ операциями сложения использовано лишь n операций умножения.

Согласно теореме 4.3 для всякого многочлена $P_n(x)$ существует и притом единственный многочлен $P_{n-1}(x)$, такой, что

$$P_n(x) = (x - c)P_{n-1}(x) + P_n(c). \quad (4.17)$$

В (4.17) $P_{n-1}(x)$ называют *частным* от деления $P_n(x)$ на $x - c$, а $P_n(c)$ — *остатком*. Справедливость (4.17) устанавливает теорема, доказанная французским математиком Э. Безу (1730–1783).

Теорема 4.4 (Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $x - c$ равен значению $P_n(c)$ этого многочлена при $x = c$.

Если $P_n(c) = 0$, то $x = c$ называют **нулем** (или **корнем**) **многочлена** $P_n(x)$. Из теоремы Безу следует, что $x = c$ является нулем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на $x - c$ без остатка.

Таким образом, отыскание нулей многочлена $P_n(x)$ равносильно отысканию его линейных множителей вида $x - c$. Однако может оказаться, что множителем этого многочлена является не только $x - c$, но и некоторая его степень $(x - c)^r$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда можно записать

$$P_n(x) = (x - c)^r P_{n-r}(x),$$

где $P_{n-r}(x)$ уже не делится на $x - c$, т.е. c не является нулем многочлена $P_{n-r}(x)$. В этом случае **натуральное число** r называют **кратностью нуля** c многочлена $P_n(x)$, а c — **r -кратным нулем** этого многочлена. При $r = 1$ имеем **простой нуль**.

Естественно поставить вопрос: всякий ли многочлен имеет нули? Известно, что существуют многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие действительных нулей; $x^2 + 1$ — один из таких многочленов, имеющих нули $x_{1,2} = \pm i$. Может быть, существуют многочлены, не имеющие нулей даже в поле комплексных чисел? Справедлива впервые доказанная в 1799 г. К. Гауссом основная теорема алгебры.

Теорема 4.5 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен с коэффициентами в поле комплексных чисел имеет нуль в этом поле.

Из этой теоремы следует существование у $P_n(x)$ хотя бы одного нуля α_1 (комплексного или действительного), т.е. справедлива запись

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)P_{n-1}(x).$$

Коэффициенты многочлена $P_{n-1}(x)$ снова являются элементами поля комплексных чисел, и по той же теореме $P_{n-1}(x)$ (при $n > 1$) имеет нуль α_2 , т.е.

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)P_{n-2}(x).$$

Продолжив таким же образом, после n шагов придем к разложению многочлена $P_n(x)$ на произведение n линейных множителей:

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n). \quad (4.18)$$

Коэффициент a_0 в (4.18) появился по следующей причине: если бы в правой части этого выражения стоял некоторый коэффициент b , то после раскрытия скобок старший член многочлена $P_n(x)$ имел бы вид bx^n , хотя на самом деле им является a_0x^n . Поэтому $b = a_0$.

Объединив в (4.18) одинаковые множители, запишем

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdots (x - \alpha_i)^{r_i} \cdots (x - \alpha_m)^{r_m},$$

где

$$r_1 + r_2 + \dots + r_i + \dots + r_m = n.$$

При этом предполагаем, что среди нулей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m$ нет равных; натуральное число r_i является кратностью нуля α_i .

Итак, всякий многочлен $P_n(x)$ степени $n \geq 1$ имеет n нулей, если каждый из нулей считать столько раз, какова его кратность.

Связь между коэффициентами многочлена $P_n(x)$ и его нулями x_i , $i = \overline{1, n}$ (каждый нуль многочлена повторен столько раз, какова его кратность) устанавливает теорема Виета.

Теорема 4.6 (Виета). Для коэффициентов многочлена $P_n(x)$ справедливы равенства

$$a_1 = -a_0(x_1 + x_2 + \dots + x_n);$$

$$a_2 = a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_n);$$

$$a_3 = -a_0(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_1x_{n-1}x_n + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n = (-1)^n a_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_n.$$

◀ Эти равенства следуют из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в многочлене $P_n(x)$ и его разложении (4.18). Итак, любой коэффициент a_k ($k = \overline{1, n}$) равен произведению числа $(-1)^k a_0$ на сумму, слагаемыми которой являются произведения всевозможных наборов по k нулей многочлена $P_n(x)$. ▶

Пусть многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный нуль α , т.е.

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Тогда

$$\overline{a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n} = 0,$$

где черта сверху означает переход к комплексно сопряженному числу. Учитывая, что

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2} \quad \text{и} \quad z_1 z_2 = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

для любых действительных чисел z_1 и z_2 , получаем

$$a_0 (\overline{\alpha})^n + a_1 (\overline{\alpha})^{n-1} + \dots + a_{n-1} \overline{\alpha} + a_n = 0,$$

или $P_n(\overline{\alpha}) = 0$. Это означает, что если комплексное (но не действительное) число α служит нулем многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами, то нулем этого многочлена

будет и комплексно сопряженное α число $\bar{\alpha}$, а в разложении (4.18) будет обязательно сомножитель

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} = P_2(x, \alpha),$$

причем коэффициенты $\alpha + \bar{\alpha}$ и $\alpha\bar{\alpha}$ квадратного *третчлена* $P_2(x, \alpha)$ — действительные числа.

Пользуясь этим, покажем, что нули α и $\bar{\alpha}$ имеют одну и ту же кратность. Пусть эти нули имеют соответственно кратности k и m , и пусть, например, $k > m$. Тогда

$$P_n(x) = (P_2(x, \alpha))^m P_{n-2m}(x).$$

Очевидно, что многочлен $P_{n-2m}(x)$ также имеет действительные коэффициенты, а α — его $(k - m)$ -кратный нуль, тогда как число $\bar{\alpha}$ уже не является его нулем. Но этого не может быть в силу указанного выше свойства многочлена с действительными коэффициентами (если такой многочлен имеет комплексный, а не действительный нуль α , то он имеет своим нулем и $\bar{\alpha}$).

Таким образом, можно сказать, что комплексные нули многочлена с действительными коэффициентами попарно комплексно сопряжены. Завершим рассмотрение свойств многочленов формулировкой вывода, широко используемого в дальнейшем.

Многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами единственным образом представим (с точностью до порядка сомножителей) в виде произведения своего старшего коэффициента a_0 и нескольких многочленов с действительными коэффициентами: линейных вида $x - \alpha$, соответствующих его действительным нулям, и квадратных вида $x^2 + px + q$, соответствующих парам комплексно сопряженных нулей.

В общем случае разложение многочлена на множители указанного вида является трудной задачей. В наиболее простых случаях этот вопрос можно решить с помощью алгебраических преобразований.

Пример 4.11. Разложим на простейшие множители многочлен $x^4 + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1). \quad \# \end{aligned}$$

Более общий способ разложения многочлена $P_n(x)$ на множители связан с предварительным нахождением его нулей, т.е. с решением соответствующего алгебраического уравнения $P_n(x) = 0$ степени $n \in \mathbb{N}$. Основная теорема алгебры устанавливает лишь существование корней такого уравнения в поле комплексных чисел, но не указывает методов нахождения этих корней.

Помимо формул для решения квадратного уравнения, которые позволяют найти нули многочлена второй степени, известны полученные итальянскими математиками XVI в. решения в радикалах уравнений третьей и четвертой степеней. После этого почти три столетия делались безуспешные попытки решить в радикалах уравнения пятой и более высоких степеней, пока Н. Абель не доказал, что в общем случае это невозможно. Уравнения любой степени $n \in \mathbb{N}$ некоторых частных видов могут быть решены в радикалах, например *двучленное уравнение* вида

$$a_0 x^n + a_n = 0.$$

Полный анализ условий разрешимости в радикалах алгебраических уравнений стал возможен на основе работ Э. Галуа.

Действительное или комплексное число, являющееся нулем многочлена с целыми коэффициентами, называют **алгебраическим** действительным или комплексным соответственно. Г. Кантор доказал, что множество всех действительных алгебраических чисел и множество всех комплексных алгебраических чисел *счетны*. Числа, не являющиеся алгебраическими, именуют *трансцендентными*. Так как множество действительных алгебраических чисел *сечно*, а множество

всех действительных чисел *несчетно* (см. Д.2.1), то „большинство“ действительных чисел трансцендентны. Однако не так легко указать явно трансцендентные числа (можно, например, доказать, но это вовсе не просто, трансцендентность числа π).

Многие прикладные задачи механики и физики, связанные с анализом динамических процессов и устойчивости движения, а также проблемы автоматического регулирования различных технических систем приводят к необходимости вычисления нулей многочленов или изучения их расположения на *комплексной плоскости*. Это стимулировало большое количество исследований по оценке границ, в которых могут быть заключены нули многочлена, и по их приближенному вычислению. Эти исследования отражены в литературе по алгебраическим уравнениям.

4.5. Группа подстановок

Взаимно однозначное отображение на себя (или преобразование) конечного множества $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ первых n натуральных чисел называют подстановкой n чисел (или подстановкой n -й степени).

Подстановку принято записывать в виде заключенных в круглые скобки двух строк чисел. Например, взаимно однозначное соответствие натуральных чисел 1, 2 и 3, заданное множеством

$$\{(2, 3), (1, 2), (3, 1)\}$$

упорядоченных пар, записывают в виде подстановки p третьей степени

$$p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

в которой 2 переходит в 3, 1 — в 2 и 3 — в 1. Поскольку отображение не изменится при изменении порядка расположения упорядоченных пар, одну и ту же подстановку можно представить в нескольких формах:

$$p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Предпочтительнее запись, при которой числа в верхней строке расположены в естественном порядке. Тогда подстановка n -й степени принимает вид

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

где i_1, i_2, \dots, i_n — расположенные в некотором определенном порядке первые n натуральных чисел. Каждое изменение их расположения будет задавать новую подстановку, а общее число подстановок n -й степени совпадет с числом $n!$ перестановок первых n элементов множества N в нижней строке (4.19). **Тождественная подстановка n -й степени** переводит каждое число в себя и может быть записана в виде

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Композицией $p_2 \circ p_1$ подстановок n -й степени p_1 и p_2 называют подстановку n -й степени $p = p_1 p_2$, которая является результатом последовательного выполнения отображения, сперва задаваемого p_1 , а затем задаваемого p_2 . Композицию подстановок записывают в виде их произведения, но взятых в обратном порядке, причем $p_1 p_2 \neq p_2 p_1$. Например, для подстановок

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } p_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$p_1 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } p_2 p_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что если p — подстановка n -й степени, то

$$pe_n = e_np = p,$$

т.е. e_n выполняет роль *нейтрального элемента* относительно закона композиции отображений. Если строки подстановки p в (4.19) поменять местами, то получим подстановку

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

обратную к подстановке p и обладающую свойством

$$pp^{-1} = p^{-1}p = e_n,$$

т.е. p^{-1} выполняет роль *симметричного* для p элемента относительно закона композиции отображений. Таким образом, множество P из $n!$ подстановок n -й степени образует мультипликативную *группу* (см. табл. 4.1) относительно этого закона, который в данном случае играет роль *мультипликативного закона* (ассоциативного, но не коммутативного). Множество P называют *группой подстановок n -й степени*.

Поскольку при записи в виде (4.19) первая строка неизменна, подстановку n -й степени можно задать лишь второй строкой:

$$p = (i_1, i_2, \dots, i_n),$$

т.е. перестановкой первых n элементов множества N . Если в такой перестановке поменять местами любые два числа (не обязательно стоящие рядом), а остальные оставить на своих местах, то получим новую перестановку. Это преобразование называют *транспозицией перестановки*. Два числа образуют *инверсию* в перестановке, когда меньшее из них расположено правее большего (или, как говорят, большее число в перестановке встречается раньше меньшего). Перестановку называют *четной*, если общее число инверсий в ее строке четное, и *нечетной* — в противном случае.

Для подсчета общего числа инверсий в некоторой перестановке из n элементов последовательно сравнивают каждый элемент, начиная с первого слева, со всеми, следующими за ним, и определяют количество стоящих правее его меньших чисел. Это дает число инверсий данного элемента. Полученные таким образом $n - 1$ чисел складывают.

Пример 4.12. а. Перестановка $(1, 2, \dots, n)$ четная при любом n , так как число инверсий в ней равно нулю.

б. Перестановка $(7, 4, 5, 1, 3, 6, 2)$ содержит 14 инверсий $(6 + 3 + 3 + 0 + 1 + 1)$ и поэтому четная.

в. Перестановка $(3, 8, 5, 2, 4, 6, 9, 7, 1)$ содержит 17 инверсий $(2 + 6 + 3 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1)$ и поэтому нечетная.

Теорема 4.7. Любая транспозиция меняет четность перестановки.

◀ Рассмотрим сначала случай, когда переставляемые числа i и j стоят рядом, т.е. перестановка исходная и перестановка, полученная транспозицией, имеют вид

$$(\dots, i, j, \dots) \quad \text{и} \quad (\dots, j, i, \dots),$$

где многоточия заменяют те числа, которые не затрагивает данная транспозиция. В обеих перестановках каждое из чисел i, j составляет одни и те же инверсии с числами, которые остаются на своих местах. Если числа i и j в исходной перестановке не образовывали инверсии, то после транспозиции возникнет одна новая инверсия. Если же эти числа в исходной перестановке образовывали инверсию, то после транспозиции она исчезнет, т.е. общее количество инверсий станет на одну меньше. В обоих случаях четность перестановки меняется.

Пусть теперь между переставляемыми числами i и j расположены m чисел ($m \in \mathbb{N}$), т.е. исходная перестановка имеет вид

$$(\dots, i, k_1, k_2, \dots, k_m, j, \dots). \quad (4.21)$$

Переставить местами числа i и j можно в результате последовательной смены мест соседних чисел, выполнив $2m + 1$ шагов (переставим i с k_1 , затем i , стоящее уже на месте k_1 , с k_2 и т.д., пока i за m шагов не займет место k_m и не станет рядом с j ; затем поменяем местами i и j , и, наконец, еще m шагов уйдет на то, чтобы последовательно j переставить с k_m , k_{m-1} и т.д., после чего j займет место i , а числа k_1, k_2, \dots, k_m сохранят свои места). При этом четность перестановки меняется нечетное число $(2m + 1)$ раз. Поэтому перестановки (4.21) и

$$(\dots, j, k_1, k_2, \dots, k_m, i, \dots)$$

имеют противоположные четности. ►

Рассмотрим запись подстановки (4.19). Перестановки, составляющие ее верхнюю и нижнюю строки, могут иметь или одинаковые, или противоположные четности. Переход к любой другой записи можно осуществить путем последовательного выполнения нескольких транспозиций в верхней строке и соответствующих им транспозиций в нижней строке. Однако совершая одну транспозицию в верхней строке (4.19) и одну транспозицию соответствующих элементов в нижней строке, мы одновременно меняем четности обеих перестановок и поэтому сохраняем совпадение или противоположность их четностей. Отсюда следует, что при любой записи подстановки четности верхней и нижней строк либо совпадают, либо противоположны.

Определение 4.10. Подстановку называют **четной**, если перестановки в ее обеих строках имеют одинаковую четность, и **нечетной** — если противоположную.

Ясно, что тождественная подстановка (4.20) является четной, а четность подстановки, задаваемой в виде (4.19), совпадает с четностью перестановки в ее нижней строке.

Сказанное выше можно обобщить применительно к взаимно однозначному отображению на себя (преобразованию) любого конечного множества

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

(не обязательно числового), если пронумеровать его элементы первыми n натуральными числами.

Пример 4.13. Пусть $n = 3$ и $a_1 = A$, $a_2 = B$, $a_3 = C$ — вершины равностороннего треугольника (рис. 4.5). Тогда множество P из $n! = 3! = 6$ подстановок

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix},$$

где i_1, i_2, i_3 — расположенные в некотором порядке три натуральных числа 1, 2, 3, описывает группу симметрий этого треугольника, т.е.

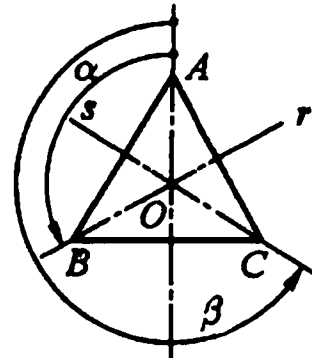


Рис. 4.5

таких перемещений треугольника в плоскости, при которых он совпадает с самим собой. Тождественная подстановка e , когда $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$, оставляет треугольник на месте. При $i_1 = 2, i_2 = 3, i_3 = 1$ и $i_1 = 3, i_2 = 1, i_3 = 2$ (четные подстановки α и β) происходит поворот треугольника против часовой стрелки относительно точки O соответственно на углы $\alpha = 2\pi/3$ и $\beta = 4\pi/3$ (см. рис. 4.5). При $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 2$ (нечетная подстановка γ) треугольник поворачивается вокруг оси симметрии OA . Повороты вокруг осей симметрии OB и OC задают нечетные подстановки r и s соответственно при $i_1 = 3, i_2 = 2, i_3 = 1$ и $i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 3$.

Произведение $p_1 p_2$ любых из этих подстановок также задает одну из операций совмещения треугольника (например, $qr = \beta$). В левом столбце и верхней строке табл. 4.2 помещены обозначения подстановок p_1 и p_2 соответственно, а на остальных местах — произведения $p_1 p_2$ этих подстановок.

В каждой строке и в каждом столбце табл. 4.2 присутствует тождественная подстановка e , т.е. всякая операция имеет симметричную (или обратную), причем для операции поворота относительно любой оси симметрии (и, разумеется, для тождественной операции) обратной является сама эта операция.

Таблица 4.2

e	α	β	q	r	s
α	β	e	r	s	q
β	e	α	s	q	r
q	s	r	e	β	α
r	q	s	α	e	β
s	r	q	β	α	e

Таблица несимметрична относительно своей главной диагонали (проходящей через верхний левый и правый нижний элементы), что еще раз показывает, что произведение подстановок некоммутативно.

Рассмотренное множество P подстановок называют также

группой симметрий фигуры (в данном случае равностороннего треугольника). Аналогично можно построить группу симметрий любого другого геометрического объекта как совокупность всех преобразований метрического пространства, совмещающих его с ним самим (например, группу симметрий квадрата, куба, тетраэдра и т.п.). Именно с таких позиций Е.С. Федоров в 1890 г. построил классификацию правильных пространственных систем точек применительно к кристаллографии. Это было исторически первое приложение теории групп непосредственно в естествознании.

Вопросы и задачи

4.1. Проверить, обладает ли закон композиции (операция) τ свойствами ассоциативности и коммутативности на множестве E :

- а) $E = \mathbb{N}$, $x \tau y = x^y$; б) $E = \mathbb{N}$, $x \tau y = 2xy$;
- в) $E = \mathbb{Z}$, $x \tau y = x^2 + y^2$; г) $E = \mathbb{Z}$, $x \tau y = x - y$;
- д) $E = \mathbb{R}$, $x \tau y = \sin x \cdot 7 \sin y$;

е) $E = \mathbb{N}$, $x \tau y = \text{НОД}(x, y)$, где НОД — наибольший общий делитель двух натуральных чисел.

4.2. Установить, какие алгебраические структуры образуются следующими числовыми множествами относительно указанных законов композиции:

а) одно из множеств \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, \mathbb{R} , $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, \mathbb{C} , $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$), $\{-1, 1\}$ относительно сложения и относительно умножения;

б) множество всех четных чисел относительно сложения и умножения;

в) множество степеней заданного действительного числа $a \neq 0$ с целыми показателями относительно умножения;

г) множество всех комплексных корней заданной степени $n \in \mathbb{N}$ из единицы относительно умножения;

д) множество комплексных корней всех степеней $n \in \mathbb{N}$ из единицы относительно умножения;

е) множества комплексных чисел с заданным модулем $r \in \mathbb{R}$ относительно умножения;

ж) множество комплексных чисел с модулем, не превосходящим заданное число $R \neq 0$, относительно сложения и относительно умножения;

з) множество комплексных чисел с ненулевым модулем, расположенных на лучах, выходящих из начала координат и образующих с осью Ox углы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, относительно умножения.

и) множество $P(E)$ всех подмножеств некоторого множества E относительно операций симметрической разности и пересечения и относительно каждой из них в отдельности.

4.3. На множестве $E = \{a, b, c\}$ одной из таблиц

τ	a	b	c
a	b	c	a
b	c	c	b
c	b	b	c

τ	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

τ	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

задан закон композиции τ . Для каждого из этих законов определить его свойства, указать нейтральный элемент и пары симметричных элементов (если они существуют), установить тип алгебраической структуры.

4.4. На множестве $E = \{a, b, c\}$ при помощи таблиц

$+$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

заданы аддитивный $(+)$ и мультипликативный $(*)$ законы композиции. Для каждого из этих законов определить его свойства, указать нейтральный элемент и пары симметричных элементов (если они существуют). Какую алгебраическую структуру образует множество E относительно каждого из заданных законов и какую — относительно обоих законов? Какой смысл приобретают эти законы в числовом множестве, если положить $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$?

4.5. На множестве $E = \{0, 1, p, q\}$ при помощи таблиц

$+$	0	1	p	q
0	0	1	p	q
1	1	0	q	p
p	p	q	0	1
q	q	p	1	0

$*$	0	1	p	q
0	0	0	0	0
1	0	1	p	q
p	0	p	q	1
q	0	q	1	p

заданы аддитивный $(+)$ и мультипликативный $(*)$ законы композиции. Для каждого из этих законов определить его свойства, указать нейтральный элемент и пары симметричных элементов (если они существуют). Какую алгебраическую структуру образует множество E относительно каждого из заданных законов и какую — относительно обоих законов?

4.6. Доказать свойства операций сложения и умножения комплексных чисел.

4.7. Найти действительную и мнимую части комплексных чисел:

- а) $(2+i)(3-i) + (2+3i)(3+4i)$; б) $(3+i)^3 - (3-i)^3$;
в) $(5+i)(7-6i)/(3+i)$; г) $(1+3i)(8-i)/(2+i)^2$;
д) $(x-1-i)(x+1+i)(x-1+i)(x+1-i)$, $x \in \mathbb{R}$;
е) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; ж) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; з) $(1+i)^{25}$;
и) $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$; к) $\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta - i \sin \beta}$.

4.8. Доказать равенства:

- а) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; б) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
в) $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, $|z_2| \neq 0$; г) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, $n \in \mathbb{N}$;
д) $|\overline{z_1 z_2}| = |\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2|$; е) $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.9. Доказать, что $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. При каких условиях эти неравенства переходят в равенства?

4.10. Найти все комплексные числа, сопряженные к своему а) квадрату и б) кубу.

4.11. Пусть на комплексной плоскости заданы три точки z_1, z_2, z_3 .

1. Найти точку z , определяющую положение центра масс системы материальных точек с массами m_1, m_2, m_3 , расположенных в заданных трех точках. При каком условии центр масс будет в начале координат?

2. Заданные точки являются вершинами треугольника. Найти точку пересечения его медиан. При каком условии она будет в начале координат?

3. Заданные точки являются тремя вершинами A_1, A_2, A_3 параллелограмма. Найти его четвертую вершину A_4 , противолежащую A_2 . При каком условии она будет в начале координат?

4. При каком условии заданные точки лежат на одной прямой?

5. Найти центр окружности, проходящей через заданные точки. При каком условии он будет в начале координат?

6. Как расположены заданные точки, если $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ и $z_1 + z_2 + z_3 = 0$?

4.12. Найти множество точек комплексной плоскости, заданных условием:

а) $|\operatorname{Re} z| \leq 1$; б) $|\operatorname{Im} z| = 1$; в) $|\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 1$;

г) $|\arg z| < \pi/3$; д) $\operatorname{Re} iz < -1$; е) $|z + 1| = 1$;

ж) $|z| \leq 2$; з) $|z - i| < |z + i|$; и) $|z + 2i - 1| \leq 2$;

к) $\sin |z| > 0$; л) $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$;

м) $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = n, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}$;

н) $1 \leq |z - 2i| < 2$; о) $\lg |z - 10i| < 1$;

п) $z^2 = \bar{z}^3$; р) $z^n = \bar{z}, \quad n \in \mathbb{N}$; с) $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$.

4.13. Доказать равенства:

а) $\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \cdot \sin^2 x + 5 \cos x \cdot \sin^4 x$;

б) $\sin 7x = 7 \cos^6 x \cdot \sin x - 35 \cos^4 x \cdot \sin^3 x + 21 \cos^2 x \cdot \sin^5 x - \sin^7 x$;

в) $\frac{(1 + i \operatorname{tg} x)^n}{(1 - i \operatorname{tg} x)^n} = \frac{1 + i \operatorname{tg} nx}{1 - i \operatorname{tg} nx}, \quad n \in \mathbb{N}$;

г) $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha$, если $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha, \quad n \in \mathbb{N}$;

д) $\operatorname{tg} 6x = 2 \frac{3 \operatorname{tg} x - 10 \operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg}^5 x}{1 - 15 \operatorname{tg}^2 x + 15 \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^6 x}$.

4.14. Верно ли равенство $(z^m)^{1/(nm)} = z^{1/n}, \quad m, n \in \mathbb{N}$?

4.15. Найти произведение всех корней степени $n \in \mathbb{N}$ из единицы.

4.16. Является ли число $(2 + i)/(2 - i)$ корнем некоторой степени из единицы?

4.17. Найти комплексные числа, соответствующие противоположным вершинам квадрата, если двум другим вершинам соответствуют числа z_1 и z_3 .

4.18. Найти комплексные числа, соответствующие вершинам правильного n -угольника, если двум его соседним вершинам соответствуют числа z_1 и z_2 .

4.19. Доказать, что целые нули многочлена с целыми коэффициентами являются делителями его свободного члена (коэффициента a_n), и найти целые нули многочленов:

- а) $x^3 + 2x^2 + x + 2$; б) $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;
- в) $2x^3 - 5x^2 - 2x - 2$; г) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$;
- д) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

4.20. Доказать, что каждый многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный нуль.

4.21. Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, нулями которого являются:

- а) 3 и $2 - i$; б) i (корень кратности 2) и $-1 - i$;
- в) 0, 1, i .

4.22. Найти:

а) многочлен с нулями $x_1 + x_2$, $x_2 + x_3$ и $x_3 + x_1$ при условии, что числа x_1 , x_2 и x_3 являются нулями многочлена $x^3 - x^2 - 1$;

б) значение a , при котором нули многочлена $x^3 + x^2 + 2x + a$ образуют геометрическую прогрессию;

в) сумму квадратов и сумму кубов нулей многочлена $8x^4 - 5x^2 + 2x + 1$;

г) сумму всех коэффициентов многочлена: 1) $(4x - 5)^{16}$; 2) $(4x^2 - 2x - 1)^{13}(5x^2 - 7)^4$;

д) многочлен $P(x)$ наименьшей степени по условию:

1) $P(-3) = 13$, $P(4) = 13$, $P(5) = 21$;

2) $P(-1) = 4$, $P(0) = 3$, $P(1) = 0$, $P(2) = 7$;

3) $P(-1) = -1$, $P(1) = 0$, $P(3) = 1$, $P(5) = 2$.

4.23. Найти четность подстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 4 & 8 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 7 & 2 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 1 & 3 & 5 & \dots \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2 & 4 & 6 & \dots \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix};$

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & n-1 & 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}.$

4.24. Записать группу симметрий квадрата, найти четность каждой подстановки из этой группы, построить таблицу, аналогичную табл. 4.2, и проанализировать ее.

5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

5.1. Понятие метрического пространства

Под *пространством* понимают *множество*, между *элементами* которого установлены определенные соотношения.

Определение 5.1. Множество M называют *метрическим пространством*, если имеется правило, которое позволяет для любых двух точек x и y указать число $\rho(x, y)$ (*расстояние* от x до y), причем это число удовлетворяет следующим требованиям (*аксиомам*):

- а) $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$ и $\rho(x, x) = 0$ для любого x из M ;
- б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых x, y из M (симметрия расстояния);
- в) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых x, y, z из M .

О последнем требовании говорят, что расстояние должно удовлетворять *неравенству треугольника* (или аксиоме треугольника): длина любой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других сторон.

Правило, которое позволяет по паре точек x, y из M находить число $\rho(x, y)$, называют *метрикой* пространства M . Заметим, что любое *подмножество* $M' \subset M$ метрического пространства M само является метрическим пространством с той же метрикой, которая была задана во всем пространстве M .

Итак, задание метрики на множестве M , или, что то же самое, задание расстояния на этом множестве, есть задание неотрицательной действительной функции ρ , определенной на произведении $M \times M$ и удовлетворяющей аксиомам а) – в).

Согласно аксиоме в) для расстояния имеем

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &\leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \\ \rho(z, y) &\leq \rho(z, x) + \rho(x, y).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\rho(x, y) - \rho(z, y) &\leq \rho(x, z), \\ \rho(z, y) - \rho(x, y) &\leq \rho(z, x).\end{aligned}$$

Правые части последних двух неравенств совпадают согласно аксиоме б), а левые части отличаются лишь знаком. В итоге с учетом свойств *абсолютного значения числа* получаем широко используемое неравенство

$$|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leq \rho(x, z), \quad (5.1)$$

которое в элементарной геометрии соответствует теореме: разность длин двух сторон треугольника не больше длины третьей стороны.

Пример 5.1. а. Любое множество M на числовой прямой \mathbf{R} является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ для любых x и y из $M \subseteq \mathbf{R}$.

б. Множество M в плоскости \mathbf{R}^2 будет метрическим пространством, если в качестве расстояния между точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ принять обычное геометрическое расстояние

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

в. По аналогии можно ввести метрику в \mathbf{R}^n , полагая расстояние между точками

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)$$

равным

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Указанную для \mathbb{R}^n метрику называют **евклидовой** (иногда **естественной**, ибо при $n = 1, 2, 3$ она дает обычное расстояние между точками). Всюду, где не будет специальных оговорок, для множества \mathbb{R}^n будем использовать эту метрику.

Однако для этого множества можно ввести метрику, отличную от евклидовой, например

$$\rho(x, y) = \max_i |x_i - y_i| \quad \text{или} \quad \rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|. \quad (5.3)$$

В произвольном множестве M можно ввести так называемую **дискретную метрику**, положив $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, x) = 0$.

5.2. Окрестности в метрическом пространстве

Понятие *окрестности* в произвольном метрическом пространстве является обобщением аналогичного понятия для точки числовой прямой. Пусть ε — некоторое положительное число ($\varepsilon > 0$) и a — точка некоторого метрического пространства M ($a \in M$).

Определение 5.2. Множество

$$U(a, \varepsilon) = \{x \in M: \rho(a, x) < \varepsilon\}$$

называют **ε -окрестностью точки a** .

С позиций геометрии множество $U(a, \varepsilon)$ естественно называть **шаром** (точнее, **открытым шаром**) радиуса ε , причем точка a есть **центр** этого шара. Множество точек x , удовлетворяющих неравенству

$$\rho(a, x) \leq r \quad (r \in \mathbb{R}, r > 0),$$

называют **замкнутым шаром** радиуса r с центром в точке a . Наконец, точки, находящиеся на расстоянии r от точки a , так что $\rho(a, x) = r$, образуют **сферу** радиуса r с центром в точке a .

Итак, ε -окрестность точки a в метрическом пространстве есть открытый шар радиуса ε с центром в этой точке. В частности, ε -окрестность точки $a \in \mathbb{R}$ для любой из метрик вида (5.2) и (5.3) представляет собой на числовой прямой интервал с центром в a длины 2ε . На плоскости ε -окрестность точки $a \in \mathbb{R}^2$ в случае метрики (5.2) есть круг (открытый, без ограничивающей его окружности) радиуса ε с центром в этой точке (рис. 5.1,а), а в случаях (5.3) — квадраты (без граничного контура) соответственно со стороной (рис. 5.1,б) и диагональю (рис. 5.1,в), равными 2ε . В трехмерном пространстве ε -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^3$ для метрики (5.2) будет шар (без ограничивающей сферы) радиуса ε с центром в этой точке (рис. 5.2,а), а для метрик (5.3) — соответственно куб с ребром 2ε (рис. 5.2,б) и октаэдр с диагональю 2ε (рис. 5.2,в), так что термин „открытый шар“ не нужно понимать буквально.

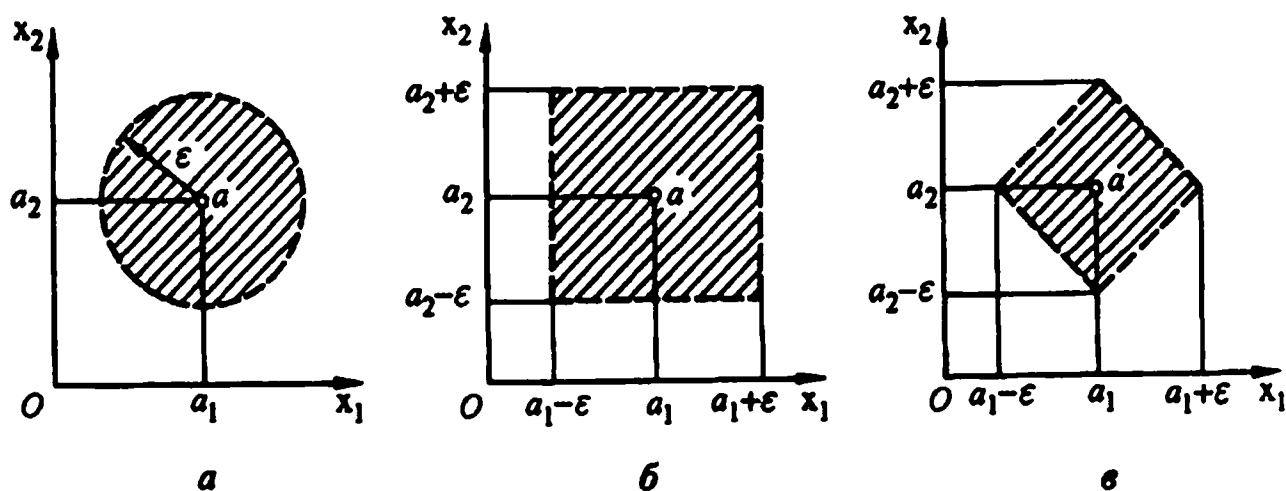


Рис. 5.1

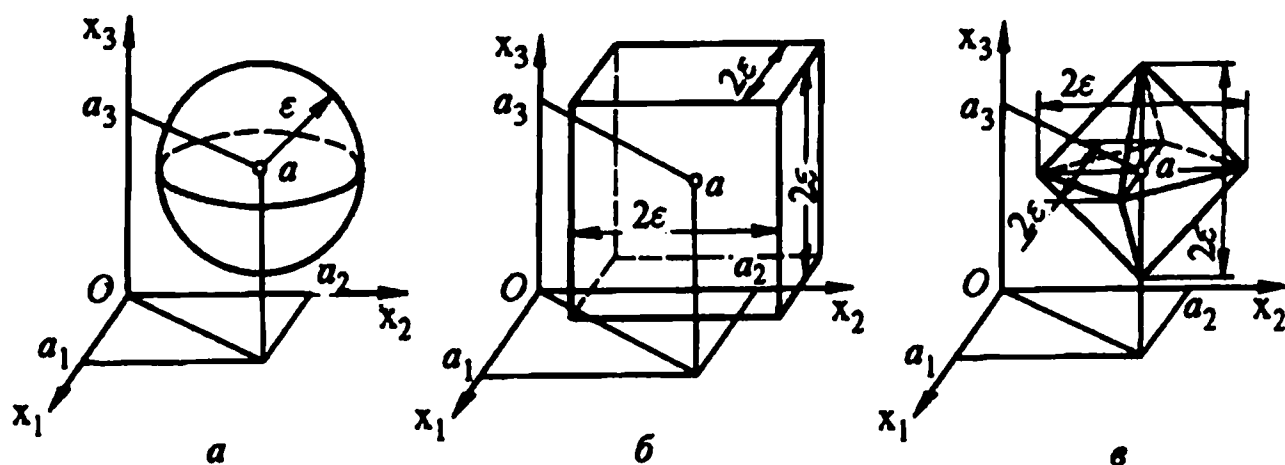


Рис. 5.2

Пусть теперь $U(a, \varepsilon_1)$ и $U(a, \varepsilon_2)$ — две ε -окрестности одной и той же точки a некоторого метрического пространства. Выбрав нумерацию так, чтобы $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \varepsilon_1$, окрестность $U(a, \varepsilon_1)$ можно включить в $U(a, \varepsilon_2)$ и потому

$$U(a, \varepsilon_1) \cap U(a, \varepsilon_2) = U(a, \varepsilon_1) = U(a, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}), \quad (5.4)$$

т.е. пересечение любых двух ε -окрестностей одной и той же точки есть ε -окрестность этой точки.

Теорема 5.1 (свойство делимости). Для любых двух различных точек x и y некоторого метрического пространства существуют ε -окрестности $U(x, \varepsilon)$ и $U(y, \varepsilon)$, имеющие пустое пересечение.

◀ Согласно аксиоме а) из определения 5.1 метрического пространства, при $x \neq y$ $\rho(x, y) > 0$. Положим $\rho(x, y) = 3\varepsilon$. Тогда $U(x, \varepsilon) \cap U(y, \varepsilon) = \emptyset$. В самом деле, если бы это пересечение содержало какую-нибудь точку z , то с учетом аксиомы в) из определения 5.1 и определения 5.2 ε -окрестности мы имели бы

$$3\varepsilon = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

а это невозможно. ▶

Свойство делимости, принятое как аксиома, выделяет класс пространств, называемых хаусдорфовыми по имени немецкого математика Ф. Хаусдорфа (1868–1942).

Определение 5.3. Множество $U \subset M$ называют *открытым*, если оно вместе с каждой своей точкой содержит некоторую ε -окрестность этой точки.

Термины „открытый промежуток“, „открытый шар“ уже использовались ранее. То, что это было оправдано, доказывает следующая теорема.

Теорема 5.2. Открытый шар $U = \{x \in M: \rho(a, x) < r\}$ радиуса r с центром в точке a метрического пространства M есть открытое множество.

◀ Пусть $x_0 \in U$, так что $\rho(a, x_0) = r_0 < r$. Рассмотрим ε -окрестность $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 радиуса $\varepsilon < r - r_0$. Эта ε -окрестность в силу определения 5.2 будет целиком включена в U . В самом деле, для любого $x \in U(x_0, \varepsilon)$ по неравенству треугольника имеем

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x_0, x) < r_0 + \varepsilon < r_0 + r - r_0 = r.$$

Таким образом, открытый шар вместе с любой своей точкой x_0 включает и некоторую ε -окрестность этой точки, что соответствует определению 5.3 открытого множества. ►

Определение 5.4. Любое открытое множество метрического пространства M , содержащее точку x_0 , называют *окрестностью этой точки* и обозначают обычно $U(x_0)$.

Согласно теореме 5.2 любая ε -окрестность $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 является открытым множеством, содержащим эту точку, а потому окрестностью точки x_0 . Очевидно, что любая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , согласно определению 5.3 открытого множества, включает некоторую ε -окрестность $U(x_0, \varepsilon)$ этой точки. В силу такой взаимосвязи все утверждения, касающиеся окрестностей точек метрического пространства, достаточно формулировать и доказывать только для ε -окрестностей рассматриваемых точек. Утверждать, что *объединение* любой совокупности окрестностей точки x_0 и *пересечение* конечного числа окрестностей этой точки есть окрестность точки x_0 , позволяет следующая теорема.

Теорема 5.3. Объединение любой совокупности открытых множеств и пересечение любой конечной совокупности открытых множеств являются открытыми множествами.

◀ То, что объединение открытых множеств является открытым, следует непосредственно из определения 5.3 открытого множества. Пусть точка x_0 принадлежит открытым множествам U_1, U_2, \dots, U_n и входит в первое из них вместе со своей ε_1 -окрестностью $U(x_0, \varepsilon_1)$, во второе — с ε_2 -окрестностью

$U(x_0, \varepsilon_2)$ и т.д. Тогда ε -окрестность $U(x_0, \varepsilon)$ этой точки, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$, содержится в каждом из множеств U_1, U_2, \dots, U_n и, следовательно, содержится в их пересечении. Таким образом, пересечение конечной совокупности открытых множеств вместе с любой своей точкой x_0 содержит и некоторую ε -окрестность этой точки, что отвечает определению 5.3 открытого множества. ►

Определение 5.5. Множество $A \subseteq M$ метрического пространства M называют **ограниченным**, если расстояния от какой-либо точки $x_0 \in M$ до каждой из точек этого множества ограничены некоторой постоянной $C > 0$, т.е. если

$$\exists C > 0: \forall x_0 \in M \forall a \in A \rho(x_0, a) \leq C. \quad (5.5)$$

Если выполнено (5.5), то ограничены расстояния между любыми двумя точками a_1 и a_2 из A . Действительно, вследствие неравенства треугольника

$$\rho(a_1, a_2) < \rho(a_1, x_0) + \rho(a_2, x_0) < C + C = 2C \quad \forall a_1, a_2 \in A.$$

Ясно, что множество $A \subseteq M$ будет **неограниченным**, если для любого сколь угодно большого действительного числа $C > 0$ в A существует пара точек a_1, a_2 , для которых $\rho(a_1, a_2) > C$. В этом случае и для любой фиксированной точки $x_0 \in M$ при любом $C > 0$ можно найти точку $a \in A$, для которой $\rho(x_0, a) > C$.

Для ограниченного множества A рассматривают величину

$$\text{diam } A = \sup_{a_1, a_2 \in A} \rho(a_1, a_2),$$

которую называют **диаметром** этого множества.

Итак, все точки ограниченного множества $A \subseteq M$ содержатся внутри шара конечного радиуса с центром в некоторой точке x_0 метрического пространства M . Поэтому можно сформулировать определение, эквивалентное определению 5.5.

Определение 5.6. Множество $A \subseteq M$ называют *ограниченным*, если все его точки содержатся в некотором шаре конечного радиуса (или если множество A включено в такой шар).

Отметим, что для множества $A \subset \mathbb{R}$ точек числовой прямой сформулированные определения ограниченности равносильны определению 2.5 *ограниченного подмножества упорядоченного множества*. Определения 5.5 и 5.6 означают, что ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}$ включено в некоторый конечный отрезок числовой прямой.

5.3. Характерные точки множеств

Определение 5.7. Точку $a \in A$ именуют *внутренней точкой* множества A , если у нее есть включенная в A ε -окрестность, т.е. если $\exists U(a, \varepsilon) : U(a, \varepsilon) \subset A$.

Из определений 5.3 и 5.7 ясно, что множество является *открытым*, если каждая точка этого множества является внутренней.

Определение 5.8. Точку $a \in M$ называют *изолированной точкой* множества M , если у этой точки существует ε -окрестность, в которой нет других точек данного множества.

Например, точка $a \in M$ будет изолированной для некоторого множества M точек числовой прямой \mathbb{R} , если существует интервал, содержащий a и не содержащий более ни одной точки из M .

Определение 5.9. Точку $a \in M$ называют *граничной точкой* множества $A \subset M$, если в любой ее ε -окрестности есть точки как принадлежащие A , так и не принадлежащие A .

Так, для множества $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ точки a и b являются граничными. Эти точки будут граничными и для множества $A = (a, b)$. Множество всех граничных точек некоторого

множества $A \subset M$ называют *границей* этого множества A и обозначают ∂A . Множество без своей границы иногда называют его *внутренностью*.

Определение 5.10. Точку $a \in M$ называют *предельной точкой* множества $A \subset M$, если в любой ε -окрестности этой точки можно указать точку $x \in A$, отличную от самой точки a .

Пример 5.2. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ точек числовой прямой ограничено сверху (снизу) и пусть точка $\xi = \sup A$ ($\eta = \inf A$) не входит в множество A . Покажем, что ξ (η) есть предельная точка множества A .

◀ Проведем доказательство для точки $\xi = \sup A$. Согласно свойствам *точной верхней грани* для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x^* \in A$, такая, что $\xi - \varepsilon < x^* \leq \xi$, причем $x_n \neq \xi$, поскольку по условию ξ не входит в A . Итак, в любой ε -окрестности точки ξ содержится точка $x^* \in A$, отличная от ξ , т.е. ξ является предельной точкой для множества A . ►

Из определений 5.9 и 5.10 следует, что как граничная, так и предельная точки множества могут либо принадлежать этому множеству, либо не принадлежать ему. Для суждения о существовании предельных точек полезна следующая теорема

Теорема 5.4 (принцип Больцано — Вейерштрасса). Каждое бесконечное множество точек отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ имеет хотя бы одну предельную точку.

◀ Заметим прежде всего, что если на отрезке $[a, b]$ имеется бесконечное множество A точек, то хотя бы на одной из двух половин $[a, (a+b)/2]$ и $[(a+b)/2, b]$ этого отрезка имеется бесконечное подмножество множества A . Пользуясь этим соображением и обозначая отрезок $[a, b]$ через Δ_1 , построим последовательность вложенных отрезков $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$, где каждый последующий составляет половину предыдущего и включает в себя бесконечное подмножество множества A .

Согласно *принципу вложенных отрезков* у этих отрезков имеется общая точка x_0 . Покажем, что она является предельной для множества A . Возьмем любую ε -окрестность $U(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 . Пусть *натуральное число* n таково, что длина отрезка Δ_n меньше ε (достаточно выбрать n из неравенства $(b - a)/2^{n-1} < \varepsilon$). Этот отрезок целиком включен в $U(x_0, \varepsilon)$ и содержит точку x_0 . Поскольку выбор значения $\varepsilon > 0$ произволен, в силу свойства отрезка Δ_n получим, что любая ε -окрестность точки x_0 содержит точку из A , отличную от x_0 . Следовательно, согласно определению 5.9, x_0 есть предельная точка множества A . ►

5.4. Замкнутые множества

Определение 5.11. Множество $F \subset M$ называют *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Пример 5.3. а. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ числовой прямой является замкнутым множеством, а *полуинтервал* $[a; b)$ не замкнут, поскольку его предельная точка b не принадлежит этому полуинтервалу.

б. В любом метрическом пространстве M шар

$$U = \{x \in M: \rho(a, x) \leq r\}$$

с центром в точке $a \in M$ и радиуса r является замкнутым множеством, и поэтому его называют *замкнутым шаром*. Действительно, возьмем любую точку x_1 , не принадлежащую этому шару, т.е.

$$\rho(a, x_1) = r_1 > r,$$

и покажем, что x_1 не может быть предельной точкой для U . Очевидно, что в шаре с центром в точке x_1 и радиуса $(r_1 - r)/2$ нет точек шара U . Если бы нашлась такая точка, то, обозначив ее через z , мы имели бы, согласно аксиоме в) из

определения 5.1,

$$\rho(a, x_1) \leq \rho(a, z) + \rho(z, x_1) \leq r + \frac{r_1 - r}{2} = \frac{r + r_1}{2} < r_1,$$

а это находится в противоречии с равенством $\rho(a, x_1) = r_1$. #

Связь замкнутых множеств с открытыми устанавливает следующая теорема.

Теорема 5.5. Если множество $F \subset M$ замкнуто, то его дополнение $M \setminus F$ открыто, и если множество $G \subset M$ открыто, то его дополнение $M \setminus G$ замкнуто.

◀ Пусть F — замкнутое множество и $G = M \setminus F$. Докажем, что G открыто. Для этого достаточно показать, что

$$\forall x_0 \in G \exists U(x_0, \varepsilon) : U(x_0, \varepsilon) \subset G.$$

Допустим противное, т.е. что в любой такой ε -окрестности есть хотя бы одна точка из F . Она отлична от x_0 , поскольку $x_0 \notin F$. Но тогда, по определению 5.10, x_0 является предельной точкой множества F . Так как F замкнуто, x_0 , согласно определению 5.11, должна принадлежать F , что противоречит предположению $x_0 \in G$. Следовательно, множество G вместе с любой своей точкой x_0 содержит некоторую ε -окрестность этой точки и, по определению 5.3, является открытым.

Для доказательства второй части теоремы предположим, что G открыто и $F = M \setminus G$. Согласно определению 5.3 открытого множества любая точка $x_0 \in G$ входит в G вместе с некоторой ε -окрестностью этой точки. Таким образом, у точки x_0 существует ε -окрестность, в которую не входит ни одна точка, принадлежащая F , т.е. с учетом определения 5.10 x_0 не может быть предельной точкой множества F . Следовательно, предельными точками F могут быть лишь точки, принадлежащие этому множеству, которое, согласно определению 5.11, будет замкнуто. ►

Из свойств открытых множеств в метрическом пространстве и теоремы 5.5 следует утверждение.

Утверждение 5.1. *Объединение конечного числа замкнутых множеств и пересечение любой совокупности замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.*

5.5. Компактные множества

Пусть M — некоторое метрическое пространство и A — подмножество в M . Множество B подмножеств $V_i \subset M$, $i \in J \subseteq \mathbb{N}$, таких, что

$$A \subset \bigcup_{i \in J} V_i,$$

образует **покрытие множества** $A \subset M$. Покрытие называют **конечным**, если оно состоит из конечного числа J подмножеств V_i . Покрытие является **открытым**, если все подмножества V_i открыты в M . Любое подмножество множества B , образованное из $V_i \in B$ и включающее A , именуют **подпокрытием** данного покрытия B .

Пример 5.4. а. Множество интервалов $(n-1, n+1) \subset \mathbb{R}$ числовой прямой при целых значениях $n \in \mathbb{Z}$ образует открытое покрытие множества \mathbb{R} . У этого покрытия не существует подпокрытий, поскольку достаточно удалить какой-либо интервал $(n-1, n+1)$ и соответствующая точка n не будет покрыта.

б. Множество интервалов $(n-3/4, n+3/4) \subset \mathbb{R}$ при $n \in \mathbb{Z}$ также является открытым покрытием \mathbb{R} . Оно образовано из открытых подмножеств, каждое из которых меньше соответствующего подмножества предыдущего покрытия, однако оно не является подпокрытием первого покрытия, поскольку состоит из подмножеств, отличных от входящих в это первое покрытие.

Определение 5.12. Множество $A \subseteq M$ называют **компактным** (или просто **компактом**), если из любого его открытого покрытия можно выделить хотя бы одно конечное подпокрытие.

Очевидно, что множество, содержащее только конечное число точек, компактно. Множество \mathbb{R} не является компактным. В самом деле, интервалы $(-n, n) \subset \mathbb{R}$ при $n \in \mathbb{N}$ образуют открытое покрытие \mathbb{R} . Любое конечное число таких интервалов содержится в одном интервале конечного радиуса и, следовательно, не покрывает всего множества \mathbb{R} . Аналогично можно показать, что множества $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n$ не компактны. Можно сформулировать также более общее положение: любое неограниченное подмножество метрического пространства не компактно. В дальнейшем будем иметь в виду только открытое покрытие множества, опуская слово „открытое“.

Нетрудно установить, что **объединение** конечного числа компактных множеств компактно. Действительно, пусть $A_i \subset M$ ($i = \overline{1, n}$) — компактные множества и B — некоторое покрытие объединения A множеств A_i . Ясно, что B является покрытием для любого A_i и в силу компактности A_i для него из B можно выбрать конечное подпокрытие. Таким образом, для всех A_i из B можно выбрать n конечных подпокрытий, составляющих конечное подпокрытие множества A , а это означает, согласно определению 5.12, что A компактно.

Теорема 5.6. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ числовой прямой является компактным множеством.

◀ Пусть B — открытое покрытие отрезка $[a, b]$ и c — центр этого отрезка. Предположим, что из B невозможно выбрать конечное покрытие для $[a, b]$. Тогда это невозможно сделать, по крайней мере, для одного из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$, который обозначим $[a_1, b_1]$. Разделив его на два равных, найдем отрезок $[a_2, b_2]$, который в 2 раза меньше, чем $[a_1, b_1]$, и обладает тем же свойством, что и $[a_1, b_1]$. Таким образом можно

построить бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_m, b_m] \supset \dots, \quad m \in \mathbb{N},$$

обладающих общим свойством: ни один из них не может быть покрыт конечным числом множеств из B .

Согласно *принципу вложенных отрезков* эти отрезки имеют хотя бы одну общую точку, которую обозначим через d . Покрытие B содержит открытое множество $V \subset \mathbb{R}$, которому также принадлежит эта точка, причем, согласно определению 5.3 открытого множества, существует интервал $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, целиком включенный в V . Отрезок $[a_m, b_m]$ имеет длину $l_m = (b - a)/2^m$ и при условии $l_m < \varepsilon$ будет включенным в указанный интервал, а значит, и в V . В итоге пришли к противоречию: по построению отрезок $[a_m, b_m]$ не может быть покрыт конечным числом множеств из B и в то же время его можно покрыть одним из них, а именно множеством V . Это противоречие и доказывает компактность отрезка $[a, b]$. ►

Можно доказать, что в \mathbb{R}^n замкнутый ограниченный параллелепипед, т.е. множество точек (x_1, x_2, \dots, x_n) , определенных системой неравенств

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \dots, \quad a_n \leq x_n \leq b_n,$$

где a_1, a_2, \dots, a_n и b_1, b_2, \dots, b_n — конечные числа, является компактным множеством. Для этого следует использовать тот же метод последовательного деления, но по отношению к каждому из n исходных отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$, что приведет к тому, что на каждом этапе деления количество частей параллелепипеда будет увеличиваться в 2^n раз.

Еще раз отметим, что и отрезок, и рассматриваемый параллелепипед являются *ограниченными* и *замкнутыми* множествами в соответствующих метрических пространствах \mathbb{R} и

\mathbb{R}^n . Оказывается, что в таких метрических пространствах компактные множества полностью исчерпываются ограниченными и замкнутыми множествами. Понятия компакта (компактного множества) и ограниченного замкнутого множества отождествляет следующее утверждение, приводимое без доказательства.

Утверждение 5.2. В метрическом пространстве \mathbb{R}^n компактными являются только ограниченные и одновременно замкнутые множества.

5.6. Определение непрерывного отображения

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение метрического пространства X с метрикой ρ в метрическое пространство Y с метрикой d ; a — предельная точка множества X .

Определение 5.13. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называют **непрерывным в точке** $a \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из $\rho(a, x) < \delta$, $x \in X$, следует $d(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Запись $\delta(\varepsilon)$ подчеркивает, что δ зависит от ε . Определение 5.13 означает, что, какова бы ни была ε -окрестность $V = V(f(a), \varepsilon) \subset Y$ точки $f(a) \in Y$, существует такая δ -окрестность $U = U(a, \delta) \subset X$ точки a , что $f(U) \subset V$.

Если отображение непрерывно в некоторой точке a , то ее называют **точкой непрерывности** этого **отображения** (или данной функции). В противном случае говорят, что отображение **разрывно** (или функция **разрывна**) в рассматриваемой точке a , и ее называют **точкой разрыва отображения** (функции).

Действительная функция $f: X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ (со значениями в \mathbb{R}) будет непрерывной в точке $a \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: (\rho(a, x) < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon), \quad (5.6)$$

а действительная функция $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ действительного переменного непрерывна в точке $a \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: (|x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \quad (5.7)$$

Определение 5.14. Отображение $f: X \rightarrow Y$, непрерывное в каждой точке пространства X , называют **непрерывным на X** .

Пусть A — собственное подмножество множества X . Если A — открытое множество, то отображение (функцию) f назовем непрерывным на A , если оно непрерывно в каждой точке $x \in A$ согласно определению 5.13. Если же A — ограниченное замкнутое множество, то отображение назовем непрерывным на A , если оно непрерывно в каждой внутренней точке $x \in A$, и, какова бы ни была граничная точка a множества A , для любой окрестности $V(b) \subset Y$ точки $b = f(a)$ найдется такая окрестность $U(a) \subset X$ точки $a \in A$, что $f(U(a) \cap A) \subset V(b)$. Учитывая определение сужения отображения f на множество A (см. 2.1), можно дать следующее определение.

Определение 5.15. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называют **непрерывным на множестве $A \subset X$** , если сужение отображения $f_A: A \rightarrow Y$ непрерывно в каждой точке пространства A .

Множество функций, непрерывных на множестве A , принято обозначать $C(A)$. Отметим, что если $x \in A \subset X$ и отображение f непрерывно в точке x , то сужение этого отображения на множество A также непрерывно в точке x . Обратное не всегда верно.

Пример 5.5. Если b — фиксированная точка множества Y , то функция $f(x) \equiv b \quad \forall x \in X$ является непрерывной на множестве X . В этом случае неравенство $d(f(a), f(x)) < \varepsilon$ справедливо для любых a и x из X , а в качестве δ (см. определение 5.13) можно взять любое положительное число.

Пример 5.6. Рассмотрим *единичную функцию Хевисайда* (3.4) (см. рис. 3.6,б)

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Во всех точках $x \in \mathbb{R}$ *числовой прямой*, за исключением $x = 0$, эта функция непрерывна (см. пример 5.5). В точке $x = 0$ свойство непрерывности нарушено. Действительно, положим $\varepsilon = 1/2$. При любом $\delta > 0$ существуют точки $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие неравенству $|x - 0| < \delta$, для которых $|\eta(x) - \eta(0)| > 1/2$. Стало быть, функция $\eta(x)$ не является непрерывной на множестве \mathbb{R} . Но если, например, рассмотреть сужение данной функции на множество $[0, b]$, $b > 0$, то, согласно определениям 5.12 и 5.14, $\eta(x)$ будет непрерывна на $[0, b]$.

Замечание 5.1. Действительная функция $f(x)$ действительного переменного $x \in \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и в двух граничных точках a и b . Интервал является открытым множеством и включает окрестность любой своей точки. Поэтому с учетом (5.7)

$$\begin{aligned} f(x) \in C(a, b) &: \Leftrightarrow \forall x_0 \in (a, b), \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \\ &|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Непрерывность в точках a и b означает выполнение условий:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 \leq x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad (5.9)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: 0 \leq b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon. \quad (5.10)$$

Функция $f(x)$ будет непрерывна на отрезке $[a, b]$ лишь при одновременном выполнении условий в (5.8)–(5.10).

Пример 5.7. В метрическом пространстве X с метрикой ρ рассмотрим действительную функцию, определяемую соотношением

$$f(x) = \rho(x, a) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X,$$

где a — фиксированная точка из X . Непрерывность этой функции в каждой точке $x_0 \in X$ следует из неравенства (5.1) в виде

$$|\rho(x, a) - \rho(x_0, a)| \leq \rho(x, x_0). \quad (5.11)$$

Действительно, если выбрать любое $\varepsilon > 0$ и положить $\delta = \varepsilon$, то из условия $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ с учетом (5.11) получим

$$|f(x) - f(x_0)| = |\rho(x, a) - \rho(x_0, a)| < \varepsilon,$$

т.е., согласно определению 5.12, рассматриваемая функция непрерывна в точке $x_0 \in X$. Но поскольку x_0 является произвольной точкой множества X , эта функция непрерывна в каждой точке из X , и, по определению 5.14, она непрерывна на данном множестве X . В частности, на \mathbb{R} непрерывна действительная функция действительного переменного $\rho(x, a) = |x - a|$, в том числе при $a = 0$ функция $\rho(x, 0) = |x|$ (см. рис. 3.5).

Пример 5.8. Действительная функция

$$f(x) = \frac{1}{x}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

(см. рис. 3.1 в случае $h = 1$) непрерывна в любой точке $x \neq 0$ числовой прямой. В самом деле, рассмотрим произвольную точку $x_0 \neq 0$ и предположим, что выполнено неравенство

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon, \quad (5.12)$$

которое задает окрестность точки $1/x_0$. Непрерывность функции $f(x) = 1/x$ в произвольной точке $x_0 \neq 0$, а значит, и непрерывность на метрическом пространстве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ будут доказаны, если для этой точки можно указать δ -окрестность, в которой будет выполнено условие (5.12). Именно из (5.12) путем тождественных преобразований попытаемся получить

ограничения на величину $|x - x_0|$, ибо она как раз и определяет расстояние между точками x и x_0 . Ясно, что искомая δ -окрестность не должна содержать точку $x = 0$, поскольку в этой точке рассматриваемая функция не определена.

Отсюда следует первое ограничение на такую окрестность с центром в точке x_0 в виде неравенства

$$|x - x_0| < |x_0|. \quad (5.13)$$

Далее имеем

$$\left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x - x_0|}{|x_0 x|} = \frac{|x - x_0|}{|x_0(x - x_0) + x_0^2|} \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0^2 - |x_0| \cdot |x - x_0||},$$

так как в силу свойств абсолютного значения числа

$$|x_0(x - x_0) + x_0^2| \geq |x_0^2 - |x_0| \cdot |x - x_0||.$$

С учетом (5.13)

$$|x_0^2 - |x_0| \cdot |x - x_0|| = x_0^2 - |x_0| \cdot |x - x_0|.$$

Если $|x - x_0|$ будет удовлетворять неравенству

$$\frac{|x - x_0|}{x_0^2 - |x_0| \cdot |x - x_0|} < \varepsilon \quad (5.14)$$

и условию (5.13), то условие (5.12) непрерывности функции $1/x$ в точке $x_0 \neq 0$ будет выполнено. Из (5.14) имеем

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon |x_0|}.$$

Нетрудно проверить, что для x , удовлетворяющих этому ограничению, выполняется и (5.13).

Таким образом, если положить $\delta = \varepsilon x_0^2 / (1 + \varepsilon |x_0|)$, то выбранная ε -окрестность точки $1/x_0$ будет включать образ соответствующей δ -окрестности любой точки $x_0 \neq 0$, что, согласно

определениям 5.13 и 5.14, свидетельствует о непрерывности функции $f(x) = 1/x$ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. В частности, согласно замечанию 5.1, эта функция будет непрерывна в любом интервале (a, b) , в том числе в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и на любом отрезке $[a, b]$, не содержащих точки $x = 0$.

5.7. Свойства непрерывного отображения множеств

Теорема 5.7. Для непрерывности отображения (функции) $f: X \rightarrow Y$ на множестве X необходимо и достаточно, чтобы при отображении f прообраз $f^{-1}(B)$ любого открытого множества $B \subset Y$ был открытым множеством в X .

◀ Для доказательства необходимости условия теоремы предположим, что B — открытое множество в Y и отображение f непрерывно на X . Пусть $A = f^{-1}(B)$ и точка $a \in A$. Тогда $f(a) \in f(A) \subset B$. По определению 5.3 открытого множества, B содержит некоторую окрестность V точки $f(a)$. Благодаря непрерывности f из определения 5.13 следует, что у точки a существует окрестность U , такая, что $f(U) \subset V$. Значит, $f(U) \subset B$ и в силу свойства (2.3) прообраза отображения $U \subset f^{-1}(B) = A$. Итак, множество A вместе с каждой своей точкой содержит некоторую окрестность этой точки, а это означает (по тому же определению 5.3), что A — открытое множество.

Для доказательства достаточности условия теоремы предположим, что a — произвольная точка X и V — ε -окрестность точки $f(a) \in Y$. Тогда прообраз $f^{-1}(V)$ является открытым множеством в X и содержит точку a . По определению 5.3, $f^{-1}(V)$ содержит некоторую δ -окрестность U точки a . Итак, для любой ε -окрестности V точки $f(a)$ существует δ -окрестность U точки a , такая, что $f(U) \subset V$, а это, согласно определению 5.13, означает непрерывность f в точке a . ►

Следствие 5.1. Функция $f: X \rightarrow Y$ непрерывна на X тогда и только тогда, когда при отображении f прообраз $f^{-1}(B)$ каждого замкнутого множества $B \subset Y$ является замкнутым множеством в X .

◀ Действительно, если множество $B \subset Y$ замкнуто, то в силу теоремы 5.5 его дополнение $Y \setminus B$ в метрическом пространстве Y открыто и по теореме 5.7 для непрерывности f необходимо и достаточно, чтобы $f^{-1}(Y \setminus B)$ было открытым множеством в метрическом пространстве X . Но из свойства (2.2) прообраза отображения

$$f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B), \quad (5.15)$$

и, согласно той же теореме 5.5, множество $f^{-1}(B)$ будет замкнутым.

Обратно, если и $B \subset Y$, и $f^{-1}(B) \subset X$ являются замкнутыми множествами, то по теореме 5.5 и $Y \setminus B \subset Y$, и его прообраз $f^{-1}(Y \setminus B) \subset X$ (с учетом (5.15)) будут открытыми множествами, т.е. в силу теоремы 5.7 функция f непрерывна на множестве X . ►

Следствие 5.2. Если функция $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ непрерывна на X , то при любом $c \in \mathbb{R}$ множества

$$\{x \in X: f(x) < c\} \quad \text{и} \quad \{x \in X: f(x) > c\}$$

открыты, а множества

$$\{x \in X: f(x) \leq c\} \quad \text{и} \quad \{x \in X: f(x) \geq c\}$$

замкнуты.

◀ Действительно, множество $\{x \in X: f(x) < c\}$ есть прообраз открытого множества $(-\infty, c) \subset \mathbb{R}$ и, согласно теореме 5.8, открыто, а множество $\{x \in X: f(x) \leq c\}$ есть прообраз замкнутого множества $(-\infty, c] \subset \mathbb{R}$, а потому в силу следствия 5.1 замкнуто. Для двух других множеств аналогичные

рассуждения приводят к сформулированным выше утверждениям. ►

Пример 5.9. Множество

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: 1/x \leq 1\} = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

замкнуто в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, но не является замкнутым в \mathbb{R} , а множество

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: 1/x < 1\} = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

открыто и в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и в \mathbb{R} .

Следствие 5.3. Если функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ непрерывны на X и отображают X в \mathbb{R} , то при любых $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ множество

$$\{x \in X: a_1 < f_1(x) < b_1, a_2 < f_2(x) < b_2, \dots, a_n < f_n(x) < b_n\}$$

открыто, а множество

$$\{x \in X: a_1 \leq f_1(x) \leq b_1, a_2 \leq f_2(x) \leq b_2, \dots, a_n \leq f_n(x) \leq b_n\}$$

замкнуто.

◀ Действительно, это утверждение справедливо в силу следствия 5.2 с учетом теоремы 5.4 и утверждения 5.2 об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. ►

Теорема 5.8. Композиция двух непрерывных отображений непрерывна (или более подробно: если отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно в точке $a \in X$, а отображение $g: Y \rightarrow Z$ непрерывно в точке $b = f(a) \in Y$, то их композиция (сложная функция) $g \circ f: X \rightarrow Z$ непрерывна в точке a).

◀ Пусть $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ — композиция двух заданных функций f и g и $c = g(b) = g(f(a)) = h(a)$. Покажем, что функция h непрерывна в точке a . Для этого рассмотрим произвольную ε -окрестность $W \subset Z$ точки c . Поскольку

g непрерывна в точке b , то, по определению 5.13, существует такая γ -окрестность V точки b в Y , что $g(V) \subset W$, а из непрерывности f в точке a следует существование такой δ -окрестности U точки a в X , что $f(U) \subset V$, причем в силу свойства (2.1) образа отображения $g(f(U)) \subset g(V)$. Итак, какова бы ни была ε -окрестность W точки $c = h(a) \in Z$, существует такая δ -окрестность U точки $a \in X$, что

$$h(U) = g \circ f(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

а это означает, согласно определению 5.13, непрерывность h в точке a . ►

Из этой теоремы вытекает следующее: если функция f непрерывна на множестве X , а функция g непрерывна на множестве $f(X) \subseteq Y$, то их суперпозиция $h = g \circ f$ непрерывна на X .

Пример 5.10. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение множества X в метрическое пространство Y с метрикой d и $b \in Y$ — фиксированная точка. Тогда действительная функция $h(x) = d(f(x), b)$, $x \in X$, будет непрерывной на множестве X как композиция непрерывной на X функции f и непрерывной на Y действительной функции расстояния d (см. пример 5.7). В частности, если на \mathbb{R} непрерывна действительная функция $f(x)$ действительного переменного $x \in \mathbb{R}$, то на \mathbb{R} непрерывна и композиция $|f(x)| = d(f(x), 0)$. Из непрерывности на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ действительной функции $f(x) = 1/x$ (см. пример 5.8) следует непрерывность на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ композиции $|f(x)| = |1/x| = 1/|x|$.

Теорема 5.9. Образ компакта при непрерывном отображении является компактом.

◄ Пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно на X . Докажем, что если X — компакт, то $f(X) \subseteq Y$ тоже будет компактом. Обозначим через Ω любое покрытие множества $f(X)$.

По определению покрытия (см. 5.5), образ $f(a)$ произвольной точки $a \in X$ должен принадлежать хотя бы одному из открытых множеств покрытия Ω , например B_0 , т.е. $f(a) \in B_0 \in \Omega$. Тогда, согласно определению прообраза множества (см. 2.1), имеем $x \in f^{-1}(B_0)$, причем $f^{-1}(B_0)$ в силу теоремы 5.7 является открытым.

Итак, прообразы $f^{-1}(B)$ всех открытых множеств B , составляющих Ω , образуют открытое покрытие множества X .

Поскольку X — компакт, для его покрытия в силу определения 5.12 можно выбрать *конечное подпокрытие* (например, $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2), \dots, f^{-1}(B_n)$). Тогда совокупность множеств B_1, B_2, \dots, B_n образует (открытое) покрытие множества $f(X)$. Действительно, для произвольного элемента $y \in f(X)$ существует хотя бы один элемент $x \in X$, такой, что $f(x) = y$. Одно из открытых множеств $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2), \dots, f^{-1}(B_n)$ (например, $f^{-1}(B_k)$) обязательно содержит x ; следовательно, B_k содержит y . В итоге получаем, что из произвольного (открытого) покрытия множества $f(X)$ можно выделить конечное подпокрытие, т.е., по определению 5.12, $f(X)$ — компакт. ►

Теорема 5.10. Непрерывная на компакте X действительная функция $f(x)$, $x \in X$, отображающая X в \mathbb{R} , ограничена и достигает на X своих *точных нижней и верхней граней*, т.е. если

$$m = \inf_{x \in X} f(x) \quad \text{и} \quad M = \sup_{x \in X} f(x),$$

то существуют такие точки $x_1, x_2 \in X$, что $f(x_1) = m$ и $f(x_2) = M$.

◄ Согласно теореме 5.9 множество $f(X)$ является компактом, т.е. в силу утверждения 5.2 оно ограничено и замкнуто. Всякое *непустое ограниченное сверху* множество числовой прямой \mathbb{R} , снабженное естественным *отношением порядка* (таковым и является множество $f(X) \subseteq \mathbb{R}$), по теореме 2.1 имеет точную верхнюю грань. В силу свойств точной верхней грани (см. 2.7)

$\sup f(X)$ является предельной точкой множества $f(X)$. Поскольку это множество замкнуто, число $\sup f(X) \in f(X)$ и является его наибольшим значением, т.е. **наибольшим значением функции f на множестве X** .

Итак, существует точка $x_2 \in X$, такая, что $f(x_2) = M$ и $f(x) \leq M \quad \forall x \in X$. Аналогичным образом можно доказать существование точной нижней грани множества $f(X)$ и точки $x_1 \in X$, такой, что $f(x_1) = m$ и $f(x) \geq m \quad \forall x \in X$, т.е. число $m = \inf f(X) \in f(X)$ является **наименьшим значением множества $f(X)$ (наименьшим значением функции $f(x)$ на множестве X)**.

В итоге получим

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in X. \quad (5.16)$$

Если положить $M^* = \max\{|M|, |m|\}$, то вместо (5.16) можно записать

$$|f(x)| \leq M^* \quad \forall x \in X, \quad (5.17)$$

что означает ограниченность функции $f(x)$ на X . ►

Пусть в условии теоремы 5.10 компакт X является **отрезком $[a, b]$ числовой прямой \mathbb{R}** . Тогда из этой теоремы вытекает следствие.

Следствие 5.4. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ действительная функция действительного переменного ограничена на этом отрезке и принимает на нем наименьшее и наибольшее значения.

Пример 5.11. а. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна на отрезке $[-1, 2]$ (см. пример 5.7), принимает на нем наименьшее значение $m = 0$ в точке $x_1 = 0$ и наибольшее значение $M = 2$ в точке $x_2 = 2$.

б. Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна на отрезке $[1/2, 2]$ (см. пример 5.8), принимает на нем наименьшее значение $m = 1/2$ в точке $x_1 = 2$ и наибольшее значение $M = 2$ в точке $x_2 = 1/2$.

5.8. Линейно связные множества

Интуиция подсказывает, что некоторые *подмножества метрических пространств* можно рассматривать как нечто целое (например, *интервал* и *отрезок* на числовой прямой \mathbb{R} , *круг* на плоскости \mathbb{R}^2 , *шар* в \mathbb{R}^n), тогда как другие подмножества могут состоять из нескольких отдельных „кусков“ (например, *объединение* двух интервалов или отрезков в \mathbb{R} , не имеющих общих точек; *объединение* двух кругов в \mathbb{R}^2 , также не имеющих общих точек; *дополнение* к некоторой окружности в \mathbb{R}^2). Далее нас будут интересовать множества, представляющие собой нечто целое. Для уточнения этого интуитивного понятия введем следующее определение.

Определение 5.16. Метрическое пространство M называют *линейно связным*, если, каковы бы ни были точки a и b этого пространства, существует такое *непрерывное отображение* φ некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ числовой прямой \mathbb{R} в пространство M , что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Отображение φ при этом именуют *путем* (или *дугой*), соединяющим точки a и b . Сами точки a и b называют в этом случае соответственно началом и концом пути.

Итак, линейно связное пространство — это метрическое пространство, в котором любые две его точки могут быть соединены некоторым путем. Путь φ проходит через точку $c \in M$, если образ $\varphi([\alpha, \beta])$ содержит эту точку, т.е. $c \in \varphi([\alpha, \beta])$. Путь φ пересекает подмножество $A \subset M$, если $\varphi([\alpha, \beta]) \cap A \neq \emptyset$.

Очевидно, что если две точки a и b множества M могут быть соединены некоторым путем φ_1 и, в свою очередь, точки b и c этого множества тоже могут быть соединены некоторым путем φ_2 , то a и c также могут быть соединены путем.

Пример 5.12. Тожественное отображение $\varphi(x) = x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является примером пути, так как оно непрерывно в \mathbb{R} . Действительно, при произвольном $\varepsilon > 0$ положим $|\varphi(x) - \varphi(a)| =$

$= |x - a| < \varepsilon$. Ясно, что условие (5.7) непрерывности функции $\varphi(x)$ будет выполнено, если выбрать $\delta = \varepsilon$. Путь $\varphi(x) = x$ проходит через любую точку $c \in \mathbb{R}$, поскольку образ $\varphi([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$ содержит эту точку, если некоторый отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ выбран так, что $c \in [\alpha, \beta]$ (рис. 5.3).

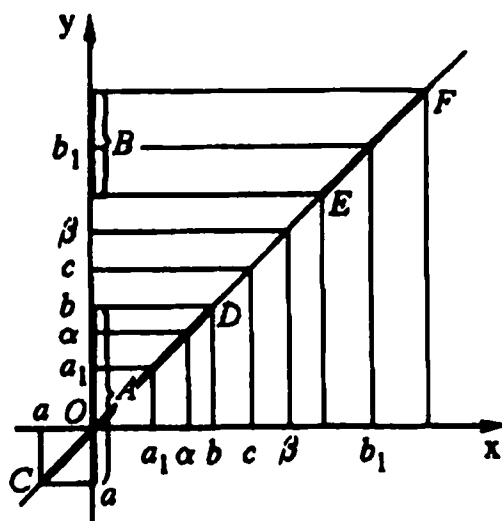


Рис. 5.3

Рассматриваемый путь $\varphi(x) = x$ пересекает подмножество $A \subset \mathbb{R}$, если $[\alpha, \beta] \cap A \neq \emptyset$. Пространство $M = A \subset \mathbb{R}$, представляющее собой некоторый промежуток числовой прямой, линейно связно, так как $\forall a, b \in A$ существует непрерывное отображение $\varphi([a, b]) = [a, b]$ отрезка $[a, b]$, такое, что $\varphi(a) = a$ и $\varphi(b) = b$. Но если $M = A \cup B$, причем $A \cap B = \emptyset$, то при выборе $a_1 \in A$ и $b_1 \in B$ не удастся подобрать такой отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$, который бы функция $\varphi(x) = x$ отображала непрерывно в M (функция $\varphi(x)$ со значениями в $M \subset \mathbb{R}$ не определена на всем отрезке $[a_1, b_1]$ и потому не является непрерывной на этом отрезке, т.е. в данном случае не удовлетворяет определению 5.16 пути — график функции $\varphi(x)$ состоит из двух прямолинейных участков CD и EF). #

Существует ли путь в таком случае? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 5.11. Множество $M \subseteq \mathbb{R}$ линейно связно тогда и только тогда, когда оно является *промежутком* числовой прямой.

◀ Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток, $a, b \in M$ и $a < b$. В качестве пути φ , соединяющего точки a и b , возьмем тождественное отображение $\varphi(x) = x \quad \forall x \in [a, b]$. Оно является непрерывным на $[a, b]$ (см. пример 5.12) и $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Таким образом, по определению 5.16, множество M является линейно связным.

Для доказательства необходимости условия теоремы предположим, что M — линейно связное множество и a, b — две его произвольные точки, причем $a < b$. По определению 5.16 линейно связного множества, существует такое непрерывное отображение $\varphi: [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, что $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Если для любой точки $c \in (a, b)$ существует точка $\gamma \in \mathbb{R}$, такая, что $\alpha < \gamma < \beta$ и $\varphi(\gamma) = c$, то это будет означать, что M содержит любую промежуточную точку между a и b , т.е. является промежутком.

Чтобы показать, что такая точка $\gamma \in \mathbb{R}$ существует, рассмотрим множество $A = \{x \in [\alpha, \beta]: f(x) \leq c\}$. Оно не пусто, так как $f(\alpha) = a < c$, и, следовательно, $\alpha \in A$. В силу ограниченности A сверху числом β существует точная верхняя грань этого множества. Положим $\gamma = \sup A$. По свойству точной верхней грани (см. 2.7) и замкнутости A (см. определение 5.11) $\gamma \in A$. Это означает, что $\gamma \in [\alpha, \beta]$ и $f(\gamma) \leq c$. Если бы $\gamma = \alpha$, то в силу непрерывности f на отрезке $[\alpha, \beta]$ и условия $f(\alpha) = a < c$ нашлись бы такие $x > \alpha$, для которых $f(\alpha) - \varepsilon < f(x) < f(\alpha) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, что при $\varepsilon = c - a > 0$ приводит к неравенству $f(x) < c$, т.е. $\gamma \neq \sup A$. Если бы $\gamma = \beta$, то нашлась бы точка $x^* < \beta = \gamma$, такая, что $f(x) > c$ при $x \geq x^*$ (в этом случае достаточно положить $\varepsilon = b - c > 0$). Следовательно, и в этом случае $\gamma \neq \sup A$.

Итак, имеем $\alpha < \gamma < \beta$, причем $f(x) \leq c$, если $x \leq \gamma$, а при $x > \gamma$ $f(x) > c$.

В силу непрерывности f на отрезке $[\alpha, \beta]$ у точки γ существует δ -окрестность

$$U(\gamma, \delta) = (\gamma - \delta, \gamma + \delta), \quad \delta > 0,$$

для которой справедливо

$$f(\gamma) - \varepsilon < f(x) < f(\gamma) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.18)$$

Если $f(\gamma) < c$, то, положив в (5.18) $\varepsilon = c - f(\gamma)$, получим $f(x) < c$ при $x \in U(\gamma, \delta)$, что противоречит свойству числа γ . Такая

же ситуация возникает и в случае $f(\gamma) > c$. Следовательно, $f(\gamma) = c$. ►

Доказывая теорему 5.11, попутно доказали следующее утверждение.

Утверждение 5.3. Если действительная функция $f(x)$ действительного переменного $x \in \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$ и $a < c < b$, то существует такая точка γ , что $\alpha < \gamma < \beta$ и $f(\gamma) = c$.

Это утверждение в дальнейшем будет играть важную роль. Его часто называют **теоремой о промежуточном значении** действительной непрерывной функции. В частности, если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, т.е. функция на концах отрезка имеет ненулевые значения разных знаков, то справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.4. Если действительная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и на концах отрезка принимает разные по знаку значения, то внутри отрезка существует точка γ , в которой $f(\gamma) = 0$.

Свойства отображения линейно связного множества устанавливает следующая теорема.

Теорема 5.12. Образ линейно связного метрического пространства при непрерывном отображении является линейно связным метрическим пространством.

◀ Пусть $f: X \rightarrow Y$ является непрерывным отображением линейно связного метрического пространства X в метрическое пространство Y . Докажем, что образ $f(X)$ является линейно связным метрическим пространством.

Рассмотрим две произвольные точки $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ множества $f(X)$. В силу линейной связности X точки α и β можно, согласно определению 5.16, соединить некоторым путем, т.е. существует непрерывное отображение φ некоторого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в множество X , такое, что $\varphi(\alpha) = a$,

$\varphi(\beta) = b$. Тогда отображение $f \circ \varphi$ будет непрерывным как композиция непрерывных отображений (см. теорему 5.8). Оно будет осуществлять отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ в множество $f(X)$ так, что $f(\varphi(\alpha)) = f(a)$ и $f(\varphi(\beta)) = f(b)$. ►

Из теорем 5.11 и 5.12 можно сделать такой вывод.

Следствие 5.5. Если действительная функция непрерывна на линейно связном множестве X , то множество ее значений является промежутком числовой прямой.

◄ Действительно, для непрерывной на линейно связном множестве X функции $f(x)$ множество $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ является, согласно теореме 5.12, линейно связным и остается лишь применить теорему 5.11. ►

Это свойство действительной функции часто формулируют как свойство промежуточных значений непрерывной на линейно связном множестве функции: вместе с любыми двумя своими значениями такая функция принимает и все промежуточные между ними значения.

5.9. Равномерная непрерывность

Пусть X и Y — метрические пространства с расстояниями ρ и d соответственно.

Определение 5.17. Функцию $f: X \rightarrow Y$ называют **равномерно непрерывной** на множестве X , если для любого положительного ε можно указать положительное δ , такое, что для любых двух точек x_1 и x_2 из X , удовлетворяющих условию $\rho(x_1, x_2) < \delta$, справедливо неравенство $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, т.е. если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$, то

$$\forall x_1, x_2 \in X \left(\rho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \right).$$

Ясно, что если функция равномерно непрерывна на X , то она непрерывна на X . Действительно, какую бы точку $a \in X$

ни взять, согласно определению 5.17, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X \left(\rho(a, x) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(x)) < \varepsilon \right),$$

а это, по определению 5.13, означает непрерывность функции f в любой точке $a \in X$ и в силу определения 5.14 — непрерывность этой функции на X . Однако обратное утверждение неверно.

Если функция f непрерывна на X , то для любой точки $a \in X$ при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что условие $\rho(a, x) < \delta$ влечет за собой $d(f(a), f(x)) < \varepsilon$. При этом число δ зависит не только от выбора ε , но и от положения точки a . Когда же говорят о равномерной непрерывности f на X , то это означает, что δ можно выбрать зависящим только от ε и не зависящим от a . Поэтому в общем случае из непрерывности функции на множестве не следует ее равномерная непрерывность на этом множестве.

Пример 5.13. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на множестве $X = [0, +\infty)$. Рассмотрим произвольные $a \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ и предположим, что

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon. \quad (5.19)$$

С учетом свойств абсолютного значения числа имеем

$$\begin{aligned} |x^2 - a^2| &= |x - a| \cdot |x + a| = |x - a| \cdot |x - a + 2a| < \\ &< |x - a| (|x - a| + 2a) = |x - a|^2 + 2a|x - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Решая последнее неравенство относительно $|x - a|$, получаем, что условие (5.19) будет выполнено, если

$$|x - a| < \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a. \quad (5.20)$$

Поэтому, согласно определению 5.13, для непрерывности данной функции в любой точке $a \in [0, +\infty)$ достаточно положить δ равным правой части (5.20).

Однако рассматриваемая функция не является равномерно непрерывной на множестве $[0, +\infty)$. В самом деле, для любых точек $x_1 = x + \delta$ и $x_2 = x$ из этого множества имеем при $\delta > 0$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(x + \delta)^2 - x^2| = |2x\delta + \delta^2| > 2x\delta.$$

При заданном $\varepsilon > 0$ для выполнения условия $|2x\delta + \delta^2| < \varepsilon$ необходимо взять $\delta < \varepsilon/|2x|$, но выбрать отсюда δ независимо от x невозможно. На рис. 5.4 видно изменение значения δ , удовлетворяющего при заданном значении $\varepsilon > 0$ определению 5.17, по

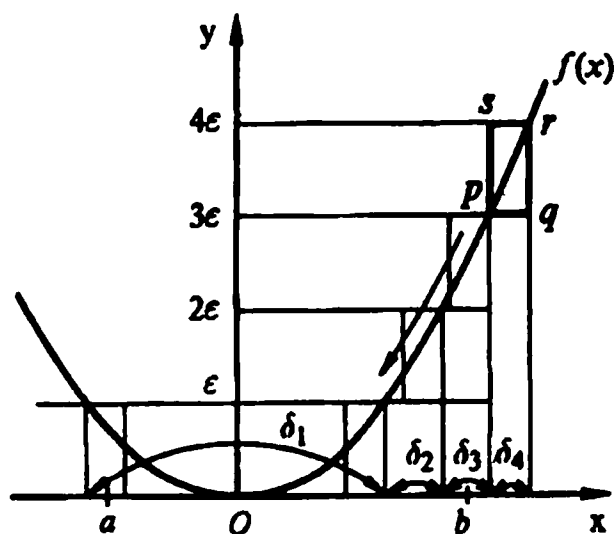


Рис. 5.4

мере удаления области возможного расположения точек x_1 и x_2 от начала координат.

Свойство равномерной непрерывности при заданном значении $\varepsilon > 0$ наглядно можно представить как возможность прямоугольной рамки $pqrs$ со сторонами ε и δ (см. рис. 5.4) „скользить“ вдоль кривой графика функции, не изменяя ориентации сторон относительно

системы координат и не пересекая кривую горизонтальными сторонами. Изображенная на рисунке рамка может свободно спуститься из своего положения вдоль кривой к началу координат и затем подняться по левой ветви параболы до исходного уровня. Но при попытке подняться выше исходного уровня рамку „заклинивает“ и тогда нужно уменьшать длину δ горизонтальной стороны. Однако при любом малом $\delta > 0$ подъем рамки будет возможен лишь до определенной высоты y . Аналогичная ситуация возникает и при любом ином заданном значении $\varepsilon > 0$. #

Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ удовлетворяет *условию Липшица* на X , если существует такая константа

$L > 0$, что при любых $x_1, x_2 \in X$

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq L\rho(x_1, x_2). \quad (5.21)$$

Легко видеть, что функция, удовлетворяющая на X условию Липшица (по имени немецкого математика Р. Липшица (1832–1903)), является равномерно непрерывной на X , причем, согласно определению 5.17, достаточно выбрать $\delta < \varepsilon/L$.

Теорема 5.13. Непрерывная на компакте X функция $f: X \rightarrow Y$ равномерно непрерывна на этом компакте.

◀ Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f на X , согласно определению 5.13, для каждой точки $a \in X$ существует δ -окрестность

$$U(a, \delta) = \{x \in X: \rho(a, x) < \delta\},$$

такая, что $\forall x \in U(a, \delta) \quad d(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$. Рассмотрим покрытие $\{V\}$ множества X построенными для каждой точки $a \in X$ шарами

$$V(a, \delta/2) = \{x \in X: \rho(a, x) < \delta/2\},$$

радиусы которых в 2 раза меньше, чем соответствующие радиусы δ -окрестностей $U(a, \delta)$. В силу компактности X (см. определение 5.12) из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие шарами

$$V_1(a_1, \delta_1/2), \dots, V_i(a_i, \delta_i/2), \dots, V_n(a_n, \delta_n/2), \quad i = \overline{1, n}$$

и принять $\delta^* = \min\{\delta_1/2, \dots, \delta_i/2, \dots, \delta_n/2\}$.

Теперь возьмем любые точки $a', a'' \in X$, такие, что $\rho(a', a'') < \delta^*$. Пусть $a' \in V_i(a_i, \delta_i/2)$ для некоторого i , т.е. $\rho(a_i, a') < \delta_i/2$. Но тогда $a' \in U(a_i, \delta_i)$. Покажем, что и a'' будет принадлежать этому шару. Имеем в силу свойства расстояния (см. аксиому в) из определения 5.1 метрического пространства)

$$\rho(a'', a_i) \leq \rho(a'', a') + \rho(a', a_i) < \frac{\delta_i}{2} + \frac{\delta_i}{2} = \delta_i.$$

Это означает, что $a'' \in U(a_i, \delta_i)$. На основании того же свойства расстояния

$$d(f(a''), f(a')) \leq d(f(a''), f(a_i)) + d(f(a_i), f(a')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для каждой пары точек $a', a'' \in X$ из условия $\rho(a', a'') < \delta^*$ следует неравенство $d(f(a'), f(a'')) < \varepsilon$, причем число δ^* зависит лишь от выбора ε и не зависит от положения этих точек, что, по определению 5.17, соответствует равномерной непрерывности f на X . ►

Для действительной функции $f(x)$ действительного переменного из этой теоремы последовательно вытекают два следствия.

Следствие 5.6. Непрерывная на отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$ действительная функция $f(x)$ равномерно непрерывна на этом отрезке.

◄ В самом деле, по теореме 5.6 любой отрезок числовой прямой является компактом и в силу теоремы 5.13 непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке. ►

Следствие 5.7. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$, то при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что отрезок можно разбить произвольно на участки длиной менее δ , на каждом из которых $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, каковы бы ни были точки x_1 и x_2 этого отрезка.

◄ По следствию 5.6, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Это позволяет в силу определения 5.17 при заданном $\varepsilon > 0$ выбрать такое $\delta > 0$, что на части этого отрезка длиной менее δ абсолютное значение разности любых двух значений функции $f(x)$ будет меньше ε (среди этих значений могут быть наибольшее и наименьшее значения функции на этой части отрезка). ►

Вернемся к примеру 5.13, в котором рассмотрена функция $f(x) = x^2$, равномерно непрерывная на любом отрезке числовой прямой. Для этой функции разбиение заданного отрезка $[a, b]$ на участки с малым абсолютным значением ее изменения определяется величиной $\delta > 0$, зависящей от конца отрезка, наиболее удаленного от точки O . Например, для отрезка $[a, b]$ (см. рис. 5.4) можно взять $\delta < \delta_3$, при этом абсолютное значение изменения функции на каждом участке разбиения будет меньше ε . Длину участков по мере приближения к точке O можно увеличивать, ограничиваясь всего четырьмя отрезками $[b - \delta_3, b]$, $[b - \delta_3 - \delta_2, b - \delta_3]$, $[b - \delta_3 - \delta_2 - \delta_1, b - \delta_3 - \delta_2]$ и $[a, b - \delta_3 - \delta_2 - \delta_1]$, на которых абсолютное значение изменения функции $f(x) = x^2$ будет меньше ε .

Вопросы и задачи

5.1. Является ли метрикой на \mathbb{R} функция $\rho(x, y)$, заданная в виде:

- а) $|x - y|$; б) $\sqrt{|x - y|}$; в) $\begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y; \end{cases}$
 г) $\frac{|x - y|}{(1 + |x - y|)}$; д) $\sin^2(x - y)$; е) $\operatorname{arctg}|x - y|$?

5.2. Указать наибольший промежуток $A \subset \mathbb{R}$, на котором можно задать метрику $\rho(x, y)$ в виде:

- а) $|x + y|$; б) $x - y$; в) $|a^x - a^y|$, $a > 0$; г) $||x| - |y||$;
 д) $|\sin x - \sin y|$; е) $|\sin^2 x - \sin^2 y|$.

5.3. Доказать, что соотношение $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in X$, задает метрику на множестве X тогда и только тогда, когда функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ инъективна.

5.4. Является ли метрикой на \mathbb{R}^2 функция $\rho(x, y)$, заданная для любых элементов $x = (a_1, b_1)$ и $y = (a_2, b_2)$ из \mathbb{R}^2 в виде:

- а) $\max\{|a_2 - a_1|, |b_2 - b_1|\}$; б) $|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|$;
 в) $\sqrt{|a_2 - a_1|^2 + |b_2 - b_1|^2}$?

5.5. Пусть C — множество всех точек окружности. Удовлетворяет ли аксиомам метрики длина кратчайшей дуги этой окружности, соединяющей любые точки $x, y \in C$?

5.6. Образуется ли множество всех прямых на плоскости, пересекающихся в одной точке, метрическое пространство, если метрикой считать абсолютное значение острого угла между любыми двумя прямыми?

5.7. Является ли метрикой на множестве C точек комплексной плоскости функция $\rho(z_1, z_2)$, заданная в виде:

а) $|z_1 - z_2|$ при $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $|z_1 - z_2| + 1$ при $\operatorname{Re} z_1 \neq \operatorname{Re} z_2$;

б) $|z_1 - z_2|$ при $|z_1| = |z_2|$ и $|z_1 - z_2| + 1$ при $|z_1| \neq |z_2|$;

в) $|z_1 - z_2|$ при $\arg z_1 = \arg z_2$ и $|z_1| + |z_2|$ при $\arg z_1 \neq \arg z_2$;

г) $|z_1 - z_2|$ при $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $|\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2| + |\operatorname{Im} z_1| + |\operatorname{Im} z_2|$ при $\operatorname{Re} z_1 \neq \operatorname{Re} z_2$?

5.8. Проверить, верны ли утверждения:

а) внутренность пересечения двух множеств равна пересечению их внутренностей;

б) внутренность объединения двух множеств равна объединению их внутренностей;

в) граница объединения двух множеств включена в объединение их границ.

5.9. Построить на числовой прямой такое множество, что:

а) все его точки изолированные;

б) нижняя грань расстояний между его точками равна нулю;

в) оно не имеет предельных точек на числовой прямой.

5.10. Доказать, что отрезок числовой прямой нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.

5.11. Выяснить, являются ли открытыми (или замкнутыми) следующие множества точек числовой прямой:

- а) \mathbf{Z} ; б) \mathbf{Q} ; в) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$; г) $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$;
 д) $\mathbf{R} \setminus (0, 1)$; е) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$; ж) $\{x \in \mathbf{R}: \cos x > 0\}$;
 з) $\{x \in \mathbf{R}: \sin x > 0\}$; и) $\mathbf{R} \setminus [0, 1]$;
 к) $\{1, 1/2, 2/3, \dots\}$; л) $\{x \in \mathbf{R}: \cos x > \sin x\}$;
 м) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \right]$; н) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right)$; о) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 \right]$.

5.12. Выяснить, являются ли открытыми (или замкнутыми) множества точек (x, y) плоскости \mathbf{R}^2 , если выполнены условия:

- а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y > \operatorname{tg} x$; в) $x = \sin(1/x)$ и $y = x = 0$;
 г) $y = \sin(1/x)$; д) $y \geq \sin(1/x)$; е) $\sin x \cdot \cos y \geq 1/2$;
 ж) $\sin x \cdot \cos y > 0$; з) $\sin(1/x) < y < 1$ и $\sin(1/y) < x < 1$.

5.13. Указать в пространствах \mathbf{R} и \mathbf{R}^2 примеры множеств: а) без граничных точек; б) не пересекающихся со своей непустой границей; в) содержащих часть своих граничных точек; г) содержащих в себе все свои граничные точки.

5.14. При каком условии функция $f(x)$, непрерывная на $[a, b]$ и на $[b, c]$, будет непрерывна на $[a, c]$?

5.15. Определить множество непрерывных функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, таких, что $f(x^2) = f(x)$ при $\forall x > 0$.

5.16. Доказать, что если действительная функция $f(x)$ непрерывна, то и функция $|f(x)|$ тоже непрерывна.

5.17. Доказать, что если действительные функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то непрерывны и функции $\min\{f(x), g(x)\}$, $\max\{f(x), g(x)\}$.

5.18. Пусть действительная функция $f(x) \in C[a, b]$. Доказать, что

$$g(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi) \in C[a, b] \quad \text{и} \quad h(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi) \in C[a, b].$$

5.19. Привести примеры функций, равномерно непрерывных на отрезках $[0, 1]$ и $[0, 2]$.

5.20. Показать, что функция $1/x$ не является равномерно непрерывной в интервале $(0, 1)$.

5.21. Показать, что если функция не является равномерно непрерывной на отрезке, то она разрывна хотя бы в одной его точке.

5.22. Построить функцию, равномерно непрерывную на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, но не являющуюся равномерно непрерывной на отрезке $[a, c]$.

5.23. Пусть заданы равномерно непрерывные отображения $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Показать, что:

1) произведение fg может не быть на $[a, +\infty)$ равномерно непрерывной функцией;

2) fg — равномерно непрерывная на $[a, +\infty)$ функция при условии, что функции f и g ограничены на $[a, +\infty)$.

5.24. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$. Будет ли композиция $g \circ f$ равномерно непрерывной на X , если:

1) f и g равномерно непрерывны соответственно на X и на Y ;

2) f равномерно непрерывна на X , а g непрерывна на Y ;

3) f непрерывна на X , а g равномерно непрерывна на Y ?

6. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

6.1. Переменные величины

Понятие *величины* является одним из основных в математике, смысл которого с развитием математики прошел длительную эволюцию. Первоначально оно возникло как обобщение более конкретных понятий длины, площади, объема, массы, времени, скорости, температуры и других геометрических и физических величин, которые поддавались измерению и представлению в числах. В последующем к величинам в математике стали относить не только *действительные*, но и *комплексные числа*, векторы и другие более сложные математические объекты, хотя для их количественного представления в конечном счете все равно используют действительные числа. Пока ограничимся рассмотрением величин, конкретное количественное *значение* каждой из которых можно выразить одним действительным числом. Такие величины называют *скалярными* (от латинского слова *scalaris* — ступенчатый).

При количественном описании различных процессов и явлений в окружающем нас мире одни величины изменяются, т.е. принимают различные числовые значения, тогда как другие остаются неизменными, т.е. сохраняют свои числовые значения. Одна и та же величина в одном случае может быть *постоянной*, а в другом — *переменной*. Так, при равномерном движении тела его скорость является постоянной величиной, а при неравномерном она становится переменной, но в обоих случаях время и пройденное расстояние будут переменными величинами.

В математике обычно постоянную величину, называемую *константой* (например, a), рассматривают как частный слу-

чай переменной (например, x), у которой все числовые значения одинаковы (используя обозначение $x \equiv a = \text{const}$ как сокращение латинского слова *constans* — постоянный, неизменный). Вместе с тем существуют так называемые абсолютно постоянные величины, которые во всех случаях сохраняют свои числовые значения: например, отношение длины окружности к ее диаметру, обозначаемое π , или скорость распространения электромагнитных волн в пустоте (скорость света), хотя в расчетах в зависимости от требуемой точности используют их различные приближенные значения.

Переход от изучения величин с фиксированным числовым значением к изучению переменных величин является условной границей между элементарной и высшей математикой.

Удобной формой геометрического представления переменной величины является текущее положение точки на *числовой прямой*. Тогда совокупность всех возможных числовых значений переменной величины, называемая *областью значений* (или *областью изменения*) этой переменной, может быть представлена соответствующим *подмножеством множества* \mathbb{R} . В этой роли могут выступать как *промежутки* числовой прямой, так и множества дискретно расположенных на ней точек (см. 1.3).

6.2. Понятие числовой последовательности

Если *множество* числовых значений, принимаемых *переменной величиной* x , можно упорядочить (см. 2.6), присвоив каждому ее значению определенный порядковый номер: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, то получим *числовую последовательность* значений переменной величины x , расположенных в порядке возрастания их номера n . При $m = n + 1$ *элемент последовательности* x_m называют *следующим* за x_n , а x_n — *предшествующим* x_m . Если $n = \overline{1, N}$, т.е. можно указать последний элемент x_N последовательности, то ее называют

конечной. Если же последнего элемента указать нельзя, т.е. $n \in \mathbb{N}$, то такую числовую последовательность называют **бесконечной** и обозначают $\{x_n\}$ (далее для краткости будем бесконечную числовую последовательность называть просто **последовательностью**).

Последовательность является удобной и сравнительно простой моделью переменных величин — главных „действующих лиц“ математического анализа. В вычислительных алгоритмах она отражает ход процесса последовательных приближений к искомому решению, а при измерении какой-либо физической величины или параметра технического объекта различными способами и с различной точностью последовательность результатов характеризует их близость к истинному значению. Отсюда следует важность изучения свойств последовательностей.

С достаточно общих позиций последовательность можно рассматривать как образ множества \mathbb{N} натуральных чисел при его отображении $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ в множество \mathbb{R} действительных чисел. Это отображение каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ ставит в соответствие по заданному правилу f единственное число

$$x_n = f(n) \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.1)$$

Элементы последовательности необязательно должны быть различными точками множества \mathbb{R} . Именно этот факт не позволяет свести понятие последовательности к понятию *счетного подмножества* множества \mathbb{R} (см. Д.2.1). Так, если $a \in \mathbb{R}$ — фиксированное число, то последовательность $x_1 = a$, $x_2 = a$, ..., $x_n = a$, ..., которую называют **постоянной**, вовсе не то же самое, что один элемент $a \in \mathbb{R}$. В данном случае при бесконечном множестве элементов последовательности множество ее значений содержит всего один элемент.

Последовательность считают заданной, если владеют правилом f , которое позволяет найти любой ее элемент x_n по его номеру n . Это правило можно задать формулой вида

(6.1) для так называемого общего члена последовательности, устанавливающей его зависимость от n (например, элементы арифметической $x_n = a + (n-1)d$ и геометрической $x_n = bq^{n-1}$ прогрессий ($a, d, b, q \in \mathbb{R}$); последовательность чисел $x_n = 1/n$, обратных к натуральным). Но x_n можно задать *рекуррентной формулой*, выразив его через предшествующие элементы. Например, последовательность $\{x_n\} = \{n!\}$ *факториалов* с общим членом $x_n = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$ задают и так: $x_1 = 1, x_n = nx_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Пример 6.1. Рекуррентной формулой можно задать последовательность **чисел Фибоначчи**:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}, \quad (6.2)$$

названных по имени итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (1180–1240), который способствовал проникновению в Европу достижений арабов в математике.

Эта последовательность связана с поставленной им известной задачей о размножении популяции кроликов: каждая пара взрослых кроликов приносит ежемесячно самку и самца, которые дают приплод через два месяца после рождения; сколько пар кроликов будет через год, если в начале года была одна пара новорожденных кроликов и за год ни одна пара не погибла. Числа Фибоначчи находят применение (часто неожиданное) в самых различных разделах математики.

Определение 6.1. Если для последовательности $\{x_n\}$ справедливо неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ (в частности, $x_n < x_{n+1}$) или $x_n \geq x_{n+1}$ (в частности, $x_n > x_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$, то ее называют *неубывающей* (в частности, *возрастающей*) или *невозрастающей* (в частности, *убывающей*). Эти названия объединяют общим термином *монотонная* (в частности, *строго монотонная*) *последовательность*.

Пример 6.2. а. Последовательности

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}, \quad (6.3)$$

$$\left\{ \frac{n-1}{n} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\} \quad (6.4)$$

строго монотонные, причем (6.3) — убывающая, а (6.4) — возрастающая.

б. Последовательность $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ чисел Фибоначчи (см. пример 6.1) монотонная, причем неубывающая.

в. Последовательности

$$\left\{ \frac{2 + (-1)^n}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \dots \right\}, \quad (6.5)$$

$$\left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \dots \right\} \quad (6.6)$$

не являются монотонными.

Определение 6.2. Последовательность $\{x_n\}$ называют **ограниченной**, если можно указать положительное число M , такое, что его не превосходит **абсолютное значение** любого элемента x_n этой последовательности, т.е. если

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M.$$

Если же

$$\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| > M,$$

то последовательность $\{x_n\}$ называют **неограниченной**. Характерно, что в символической записи условий противоположных свойств последовательности меняются местами **кванторы существования** \exists и **общности** \forall , а символ „не больше“ (\leq) изменяется на противоположный ему символ „больше“ ($>$). Это одно из проявлений **принципа двойственности** (см. 1.4 и 1.5).

Последовательности (6.3)–(6.6) ограниченные, причем для (6.5) можно указать число $M = 3/2$, а для остальных — $M = 1$, но можно выбрать и бóльшие значения M . Последовательность (6.2) чисел Фибоначчи неограниченная: с возрастанием n значение x_n превзойдет любое наперед заданное число M .

6.3. Предел последовательности

Пусть $U(b, \varepsilon) = \{x: |x - b| < \varepsilon\}$ — некоторая ε -окрестность точки $b \in \mathbb{R}$ числовой прямой.

Определение 6.3. Точку $b \in \mathbb{R}$ числовой прямой называют **пределом последовательности** $\{x_n\}$ и обозначают $b = \lim\{x_n\}$ ($b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ или $x_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$), если каково бы ни было положительное число ε , можно найти натуральное число N , такое, что начиная с номера $n = N + 1$ все элементы последовательности попадают в ε -окрестность точки b , т.е.

$$b = \lim\{x_n\} : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \\ (n > N \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon). \quad (6.7)$$

В общем случае N зависит от ε , на что указывает в (6.7) обозначение $N(\varepsilon)$. Как правило, чем меньше число ε , тем больше N .

Последовательность, для которой точка $b \in \mathbb{R}$ является пределом, называют **сходящейся к этой точке**. Определение 6.3 по геометрическому смыслу означает, что какой бы малый интервал длины 2ε с центром в точке b ни взять на числовой прямой, все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера $N + 1$, должны попадать в этот интервал (рис. 6.1). Вне его будет только конечное число элементов последовательности.

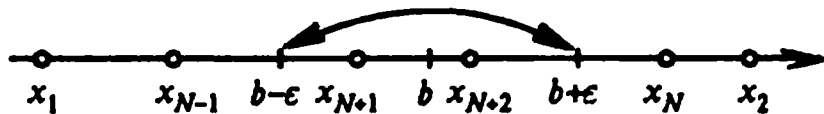


Рис. 6.1

Отсюда следует, что добавление к последовательности конечного числа элементов или исключение из нее конечного числа элементов не влияет на ее сходимости и значение ее предела, изменяется лишь номер, начиная с которого все элементы последовательности попадают в выбранную ε -окрестность точки b .

Пример 6.3. а. Покажем, что для последовательности (6.3)

$$\lim \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0. \quad (6.8)$$

При произвольном $\varepsilon > 0$ предположим, что $|1/n - 0| < \varepsilon$. Тогда $n > 1/\varepsilon$. Если принять $N = [1/\varepsilon]$ (целая часть числа $1/\varepsilon$), то (6.8) будет верно по определению 6.3.

б. Убедимся, что для (6.5)

$$\lim \left\{ \frac{2 + (-1)^n}{n} \right\} = 0.$$

В силу очевидного неравенства

$$\frac{2 + (-1)^n}{n} < \frac{3}{n}$$

примем $N = [3/\varepsilon]$. Тогда при произвольном $\varepsilon > 0$ для $n > [3/\varepsilon]$ будет выполнено условие в (6.7).

в. Ясно, что при

$$x_n \equiv c = \text{const } \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim \{x_n\} = c. \quad (6.9)$$

В самом деле, $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому в (6.7) в качестве N можно выбрать любое натуральное число.

Пример 6.4. Проверим, что при $a > 1$

$$\lim \left\{ \frac{1}{a^n} \right\} = 0.$$

При $0 < \varepsilon < 1$ предположим, что $|1/a^n - 0| < \varepsilon$, т.е. $a^n > 1/\varepsilon$. По определению логарифма, $\log_a a^n = n$. Поэтому для выполнения условия в определении 6.3 предела последовательности достаточно в (6.7) выбрать $N = [\log_a(1/\varepsilon)]$.

Пример 6.5. Последовательность (6.6) не имеет предела, т.е.

$$\lim \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \right\}$$

не существует. В самом деле, если выбрать $\varepsilon = 1$, то все ее четные элементы попадают в ε -окрестность $U(1, 1)$ точки $x = 1$, а все нечетные элементы — в ε -окрестность $U(-1, 1)$ совсем иной точки $x = -1$, причем эти окрестности не имеют общих точек ($U(1, 1) \cap U(-1, 1) = \emptyset$) (рис. 6.2). А по определению 6.3 если бы одна из точек $x = 1$ или $x = -1$ была пределом этой последовательности, то все ее элементы, начиная с некоторого номера, должны были попасть в выбранную окрестность этой точки.

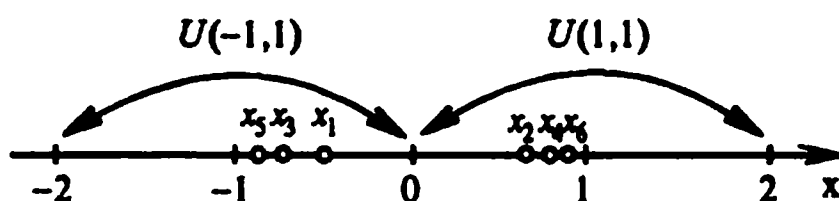


Рис. 6.2

6.4. Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 6.1. *Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

◀ Пусть у сходящейся последовательности $\{x_n\}$ по меньшей мере два предела b_1 и b_2 , причем $b_1 \neq b_2$. Тогда, по определению 6.3 предела последовательности,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}:$$

$$(|x_n - b_1| < \varepsilon \quad \forall n > N_1) \wedge (|x_n - b_2| < \varepsilon \quad \forall n > N_2).$$

Примем $\varepsilon = |b_2 - b_1|/3$ и при $n > \max\{N_1, N_2\}$ с учетом свойства (1.4) абсолютного значения получим

$$\begin{aligned} |b_2 - b_1| &= |x_n - b_1 + b_2 - x_n| \leq \\ &\leq |x_n - b_1| + |x_n - b_2| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}|b_2 - b_1|. \end{aligned}$$

В итоге приходим к противоречию $|b_2 - b_1| < 2|b_2 - b_1|/3$. Поэтому $b_1 = b_2$, что означает единственность предела сходящейся последовательности (это очевидно, если вспомнить геометрический смысл предела последовательности; в самом деле, нельзя, начиная с некоторого номера, уложить все последующие элементы последовательности в две непересекающиеся окрестности двух точек). ►

Теорема 6.2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена, т.е.

$$\exists \lim\{x_n\} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq M.$$

◄ Из определения 6.3 следует, что для сходящейся последовательности с пределом $b \in \mathbb{R}$ в его ε -окрестность $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ попадают все элементы x_n начиная с определенного номера $N + 1$. Выберем

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |b - \varepsilon|, |b + \varepsilon|\}.$$

Тогда $|x_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, что отвечает условию определения 6.2 ограниченной последовательности. ►

Теорема 6.3. Если последовательность сходится к пределу, отличному от нуля, то начиная с некоторого номера ее элементы принимают значения только того знака, каков знак ее предела, или

$$\exists \lim\{x_n\} = b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad x_n b > 0.$$

◄ Выберем $\varepsilon = |b| > 0$. Тогда, согласно определению 6.3 для сходящейся последовательности с пределом $b \in \mathbb{R}$, в его окрестность $(b - |b|, b + |b|)$ попадут все элементы x_n начиная с некоторого определенного номера $N + 1$, т.е. с учетом (1.1) при $b < 0$ $-2|b| < x_n < 0$, а при $b > 0$ $0 < x_n < 2b$. Отсюда $x_n b > 0$. ►

Следствие 6.1. Сходящаяся последовательность, элементы которой знакопостоянны, не может иметь предел другого знака.

◀ В самом деле, если бы предел последовательности имел иной знак, то, согласно теореме 6.3, начиная с некоторого номера ее элементы приняли бы знак предела, что противоречит исходному условию. ▶

Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Их *суммой*, *произведением* и *частным* называют последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ и $\{x_n / y_n\}$, а *обратной* к $\{y_n\}$ — последовательность $\{1/y_n\}$, причем последовательности $\{x_n / y_n\}$ и $\{1/y_n\}$ определены лишь при условии $y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\{x_n / y_n\} = \{x_n \cdot (1/y_n)\}$.

Теорема 6.4. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся соответственно к пределам a и b , то

$$1) \lim \{x_n + y_n\} = a + b, \quad (6.10)$$

$$2) \lim \{x_n y_n\} = ab, \quad (6.11)$$

$$3) \lim \{1/y_n\} = 1/b, \text{ если } b \neq 0. \quad (6.12)$$

◀ Обозначим $|a - x_n| = \Delta x_n > 0$ и $|b - y_n| = \Delta y_n > 0$ и выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда:

1) для сходящихся последовательностей, по определению 6.3,

$$\exists N_x, N_y \in \mathbb{N}: \left(\forall n > N_x \quad \Delta x_n < \frac{\varepsilon}{2} \right) \wedge \left(\forall n > N_y \quad \Delta y_n < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

и с учетом свойства (1.4) абсолютного значения

$$\begin{aligned} \forall n > N = \max \{N_x, N_y\} \quad |(a + b) - (x_n + y_n)| = \\ = |a - x_n + b - y_n| \leq \Delta x_n + \Delta y_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что, согласно определению 6.3 предела последовательности, доказывает (6.10);

2) воспользуемся тождеством

$$ab - x_n y_n = ab - x_n y_n + a y_n - a y_n = y_n(a - x_n) + a(b - y_n)$$

и с учетом (1.4) запишем

$$|ab - x_n y_n| \leq |y_n| \Delta x_n + |a| \Delta y_n; \quad (6.13)$$

по теореме 6.2 об ограниченности сходящейся последовательности и определению 6.2 ограниченной последовательности,

$$\exists M > 0: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n| \leq M; \quad (6.14)$$

для сходящихся последовательностей, согласно определению 6.3, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$:

$$\left(\forall n > N_1 \quad \Delta x_n < \frac{\varepsilon}{M + |a|} \right) \wedge \left(\forall n > N_2 \quad \Delta y_n < \frac{\varepsilon}{M + |a|} \right); \quad (6.15)$$

в итоге из (6.13)–(6.15) имеем: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \max\{N_1, N_2\}$:

$$\forall n > N \quad |ab - x_n y_n| < \frac{|y_n| \varepsilon}{M + |a|} + \frac{|a| \varepsilon}{M + |a|} = \frac{|y_n| + |a|}{M + |a|} \varepsilon \leq \varepsilon,$$

что, по определению 6.3, равносильно (6.11);

3) для последовательности $\{y_n\}$, сходящейся к ненулевому пределу $b \in \mathbb{R}$, при выборе $\varepsilon = |b|/2$, согласно определению 6.3 сходящейся последовательности,

$$\exists N' \in \mathbb{N}: \quad y_n \in \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2} \right) \quad \forall n > N'.$$

Тогда $y_n \in (-3|b|/2, -|b|/2)$ при $b < 0$ и $y_n \in (b/2, 3b/2)$ при $b > 0$. Таким образом,

$$\exists N' \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N' \quad |y_n| > \frac{|b|}{2}. \quad (6.16)$$

По определению 6.3 для сходящейся последовательности

$$\exists N'' \in \mathbb{N}: \forall n > N'' \quad \Delta y_n < \varepsilon \frac{b^2}{2}. \quad (6.17)$$

В итоге из (6.16) и (6.17) с учетом свойства (1.3) абсолютного значения получим: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \max\{N', N''\}$:

$$\forall n > N \quad \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{y_n} \right| = \frac{|y_n - b|}{|b| \cdot |y_n|} < 2 \frac{\Delta y_n}{b^2} < \varepsilon,$$

что в силу определения 6.3 доказывает (6.12). ►

Ясно, что (6.10) и (6.11) нетрудно обобщить на любое конечное число слагаемых или сомножителей, если в их качестве взять сходящиеся последовательности.

Следствие 6.2. При вычислении предела сходящейся последовательности один и тот же постоянный сомножитель в ее элементах можно выносить за символ предела.

◄ Полагая $c = \text{const}$, из (6.11) и (6.9) получим $\lim\{cx_n\} = c \lim\{x_n\}$. ►

Объединение этого следствия с (6.10) дает правило вычисления предела **линейной комбинации** сходящихся последовательностей, т.е. суммы конечного числа $m \in \mathbb{N}$ слагаемых, каждое из которых является произведением сходящейся последовательности и постоянного сомножителя: если $\forall k = \overline{1, m} \quad \lim\{x_n^{(k)}\} = b_k$ и $\mathbb{R} \ni c_k = \text{const}$, то

$$\lim \sum_{k=1}^m c_k \{x_n^{(k)}\} = \sum_{k=1}^m c_k \lim\{x_n^{(k)}\} = \sum_{k=1}^m c_k b_k. \quad (6.18)$$

Из (6.11) и (6.12) для сходящихся последовательностей при условиях $y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\{y_n\} \neq 0$ получим

$$\lim \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \frac{\lim\{x_n\}}{\lim\{y_n\}}. \quad (6.19)$$

Пример 6.6. а. Покажем, что $\forall a > 0 \quad \lim\{a^{1/n}\} = 1$. Пусть сначала $a > 1$. Предположим, что $|a^{1/n} - 1| < \varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$. Отсюда $a^{1/n} < 1 + \varepsilon$ и с учетом определения логарифма $1/n < \log_a(1 + \varepsilon)$. Чтобы удовлетворить определению 6.3, достаточно в (6.7) выбрать

$$N = \left\lceil \frac{1}{\log_a(1 + \varepsilon)} \right\rceil.$$

В случае $a = 1$ результат очевиден, поскольку $a^{1/n} \equiv 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. При $0 < a < 1$ имеем $1/a > 1$, а потому с учетом (6.19)

$$\lim\{a^{1/n}\} = \lim\left\{\frac{1}{(1/a)^{1/n}}\right\} = \frac{1}{\lim\{(1/a)^{1/n}\}} = 1. \quad (6.20)$$

б. Сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем q и первым членом a_1 , согласно (1.8) (см. пример 1.7), равна $s_n = a_1(1 - q^n)/(1 - q)$. Используя (6.10) и следствие 6.2, при $0 < q < 1$ получим

$$\lim\{s_n\} = a_1 \frac{1 - \lim\{q^n\}}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}, \quad (6.21)$$

поскольку с учетом примера 6.4, полагая $1/q = a > 1$, имеем $\lim\{q^n\} = \lim\{1/a^n\} = 0$.

Пример 6.7. Вычислим

$$\lim\left\{\frac{n^2 + n - 1}{2 - n + 5n^2}\right\}.$$

Непосредственно использовать (6.19) не удастся, так как последовательности $\{n^2 + n - 1\}$ и $\{2 - n + 5n^2\}$ не являются сходящимися. Выполним предварительно тождественные преобразования

$$\frac{n^2 + n - 1}{2 - n + 5n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + 5}.$$

В силу (6.8) и (6.11)

$$\lim \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \lim \left\{ \frac{1}{n^2} \right\} = 0,$$

и из (6.18)

$$\lim \left\{ 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right\} = 1, \quad \lim \left\{ \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + 5 \right\} = 5,$$

а из (6.19) искомый предел равен $1/5$.

Пример 6.8. Введенные при доказательстве теоремы 6.4 величины $\Delta x_n = |a - x_n|$ и $\Delta y_n = |b - y_n|$ можно рассматривать как абсолютные погрешности приближенных значений x_n и y_n соответственно величин a и b . Тогда полученные в ходе доказательства теоремы соотношения, приближенно заменяя в них $|a|$ на $|x_n|$ и $|b|$ на $|y_n|$, можно использовать для оценки погрешностей, возникающих при суммировании, умножении, обращении и делении приближенных значений, а именно:

$$\begin{aligned} \Delta(x_n + y_n) &\leq \Delta x_n + \Delta y_n, & \Delta(x_n y_n) &\leq |y_n| \Delta x_n + |x_n| \Delta y_n, \\ \Delta\left(\frac{1}{y_n}\right) &\leq \frac{\Delta y_n}{y_n^2}, & \Delta\left(\frac{x_n}{y_n}\right) &= \Delta\left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) \leq \frac{\Delta x_n}{|y_n|} + \frac{|x_n| \Delta y_n}{y_n^2}. \end{aligned}$$

Наибольшая возможная (максимальная) погрешность алгебраической суммы равна сумме погрешностей слагаемых, т.е.

$$\Delta_{\max}(x_n + y_n) = \Delta x_n + \Delta y_n.$$

Если в качестве погрешностей слагаемых рассматривать ошибки округления, то значение $\Delta_{\max}(x_n + y_n)$ наиболее чувствительно к погрешности наименее точного слагаемого. Поэтому, чтобы избежать лишних вычислений, не следует сохранять в более точном слагаемом лишние значащие цифры.

Чтобы обеспечить при выполнении любого из рассмотренных действий абсолютную погрешность не более Δ , можно задать следующие погрешности исходных значений: при

сложении $\Delta x_n = \Delta y_n < \Delta/2$, при умножении $\Delta x_n = \Delta y_n < \Delta/(|x_n| + |y_n|)$, при обращении y_n $\Delta y_n < y_n^2 \Delta$ и при делении x_n на y_n $\Delta x_n = \Delta y_n < y_n^2 \Delta/(|x_n| + |y_n|)$. В случае малого по абсолютному значению y_n сильно возрастают требования к точности исходных значений при обращении и делении. При близких по абсолютному значению, но противоположных по знаку x_n и y_n может стать недопустимо большой относительная погрешность их суммы

$$\frac{\Delta(x_n + y_n)}{|x_n + y_n|} \leq \frac{\Delta x_n + \Delta y_n}{|x_n + y_n|}.$$

Теорема 6.5. Если начиная с некоторого номера $N + 1$ элемент одной сходящейся последовательности не превосходит элемент с тем же номером другой сходящейся последовательности, то предел первой из них не превосходит предела второй последовательности, или

$$\begin{aligned} (\exists \lim \{x_n\}) \wedge (\exists \lim \{y_n\}) \wedge (\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ x_n \leq y_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim \{x_n\} \leq \lim \{y_n\}. \end{aligned}$$

◀ Так как $x_n - y_n \leq 0 \ \forall n > N$, согласно следствию 6.1 предел последовательности $\{x_n - y_n\}$ не может быть положительным. Тогда с учетом (6.18) имеем

$$\lim \{x_n - y_n\} = \lim \{x_n\} - \lim \{y_n\} \leq 0.$$

Отсюда $\lim \{x_n\} \leq \lim \{y_n\}$. ▶

Следствие 6.3. Если начиная с некоторого номера $N + 1$ элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ не превосходят постоянного числа b , то ее предел также не превосходит b , или

$$\begin{aligned} (\exists \lim \{x_n\}) \wedge (\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ x_n \leq b = \text{const}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim \{x_n\} \leq b. \end{aligned}$$

◀ Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$ при условии $y_n \equiv b \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\forall n > N \quad y_n \geq x_n$ и, учитывая (6.9), согласно теореме 6.5 имеем $\lim\{y_n\} = b \geq \lim\{x_n\}$. ▶

Аналогичным образом, если для сходящейся последовательности $\{x_n\}$ имеем $x_n \geq a = \text{const} \quad \forall n > N \in \mathbb{N}$, то $\lim\{x_n\} \geq a$. Если же $\forall n > N \in \mathbb{N} \quad a \leq x_n \leq b$, то $a \leq \lim\{x_n\} \leq b$, или

$$(\exists \lim\{x_n\}) \wedge (\forall n > N \in \mathbb{N} \quad x_n \in [a, b]) \Rightarrow \lim\{x_n\} \in [a, b]. \quad (6.22)$$

Замечание 6.1. Если в условии следствия 6.3 $x_n < b$, то тем не менее возможно, что $\lim\{x_n\} = b$. Например, для последовательности

$$\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$$

$x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, но с учетом (6.12)–(6.14)

$$\lim\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = 1 - \lim\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1.$$

Аналогично при $x_n > a \quad \forall n \in \mathbb{N}$ тем не менее возможно, что $\lim\{x_n\} = a$.

6.5. Признаки существования предела последовательности

Теорема 6.6. Если сходящиеся последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ имеют общий предел и начиная с некоторого номера $N + 1 \quad x_n \leq y_n \leq z_n$, то существует предел последовательности $\{y_n\}$ и он совпадает с пределом первых двух последовательностей, или

$$\begin{aligned} \left(\exists \lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = b \in \mathbb{R}\right) \wedge \left(\forall n > N \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n \leq z_n\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim\{y_n\} = b. \end{aligned}$$

◀ Согласно определению 6.3 предела последовательности,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_x, N_z \in \mathbb{N}:$$

$$(\forall n > N_x \ b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon) \wedge (\forall n > N_z \ b - \varepsilon < z_n < b + \varepsilon).$$

Тогда для $\forall n > N = \max\{N_x, N_z\}$ имеем

$$b - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < b + \varepsilon,$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: (n > N \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon),$$

что в силу определения 6.3 означает, что $\exists \lim\{z_n\}$ и $\lim\{z_n\} = b$. ►

Эту теорему часто называют теоремой о „зажатой“ или „промежуточной“ последовательности, а иногда — теоремой о двух милиционерах (на рис. 6.3 x и z — милиционеры, y — нарушитель, b — отделение милиции).

В силу теоремы 6.2 всякая сходящаяся последовательность ограничена, но обратное неверно. Однако сочетание свойств *монотонности* (в частности, *строгой монотонности*) и *ограниченности* последовательности достаточно для ее сходимости.

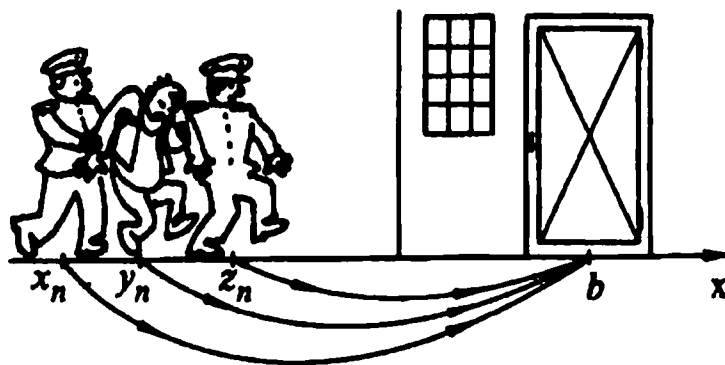


Рис. 6.3

Утверждение 6.1 (признак Вейерштрасса). Ограниченная монотонная последовательность сходится.

Доказательство утверждения 6.1 приведено в конце главы (см. Д.6.2). Здесь лишь подчеркнем, что это утверждение (как и теорема 6.6) устанавливает только достаточные (но не необходимые) условия сходимости последовательности. Так,

ограниченные и монотонные последовательности (6.3) и (6.4) сходятся, однако сходящаяся последовательность (6.5) ограничена, но не монотонна.

Признак существования какого-либо свойства математического объекта, содержащий как необходимые, так и достаточные условия, называют обычно **критерием**. Например, можно сформулировать критерий сходимости монотонной (в частности, строго монотонной) последовательности.

Утверждение 6.2. Для сходимости монотонной последовательности необходимо и достаточно ее ограниченности.

Действительно, достаточность следует из утверждения 6.1, а необходимость — из теоремы 6.2 об ограниченности сходящейся последовательности. Естественен вопрос: нельзя ли указать критерий сходимости любой (не обязательно монотонной) последовательности? Для этого предварительно дадим следующее определение.

Определение 6.4. Последовательность $\{x_n\}$ называют **фундаментальной**, если для любого положительного числа ε можно указать натуральное число N , такое, что абсолютное значение разности любых двух ее элементов с номерами, большими N , меньше ε , т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall m, n > N \quad |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Пример 6.9. Проверим фундаментальность последовательностей (6.5) и (6.6), приняв (не ограничивая общности) $m = n + k$, $k \in \mathbb{N}$.

а. Все элементы последовательности (6.5) положительны. Поэтому

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{2 + (-1)^n}{n} - \frac{2 + (-1)^{n+k}}{n+k} \right| < \frac{2 + (-1)^n}{n} \leq \frac{3}{n},$$

т.е. условие определения 6.4 будет выполнено, если взять $N = \lceil 3/\varepsilon \rceil$. Итак, последовательность (6.5) фундаментальная.

б. Для последовательности (6.6) имеем

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{(-1)^n n}{n+1} - \frac{(-1)^{n+k}(n+k)}{n+k+1} \right| = \\ &= \left| \frac{n}{n+1} - \frac{(-1)^k(n+k)}{n+k+1} \right|. \end{aligned}$$

Если k четное, то нетрудно установить, что $|x_n - x_m| < 1/n$, и достаточно выбрать $N = [1/\varepsilon]$, но если k нечетное, то $\forall n \in \mathbb{N} |x_n - x_m| > 1$. Поэтому условие определения 6.4 будет нарушено при выборе $\varepsilon \in (0, 1]$, т.е. эта последовательность не является фундаментальной.

Теорема 6.7. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна, или

$$\exists \lim \{x_n\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall m, n > N |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

◀ По определению 6.3, для сходящейся к пределу $b \in \mathbb{R}$ последовательности имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда с учетом свойства (1.4) абсолютного значения $\forall m > N$ получим

$$|x_n - x_m| = |(x_n - b) - (x_m - b)| \leq |x_n - b| + |x_m - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что соответствует определению 6.4 фундаментальной последовательности. ►

Теперь сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 6.3 (критерий Коши). Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Необходимость следует из теоремы 6.7, а доказательство достаточности дано в Д.6.2.

6.6. Число e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ рациональных чисел $x_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что эта последовательность *возрастающая и ограниченная*. Для вычисления ее элементов используем формулу (2.8) *бинома Ньютона*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k,$$

где при $0! = 1$ $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ — число сочетаний из n элементов по k . Тогда

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + n \frac{n-1}{2!n^2} + \dots + \\ &+ n \frac{(n-1) \dots (n-k+1)}{k!n^k} + \dots + n \frac{(n-1) \dots (n-n+1)}{n!n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right), \quad (6.23) \end{aligned}$$

причем в (6.23) $k = \overline{3, n-1}$. С возрастанием n на единицу в (6.23) растут и число слагаемых, каждое из которых положительно, и каждое слагаемое (кроме первых двух), так что последовательность $\{x_n\}$ является *возрастающей* и $x_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Поскольку $(1 - (k-1)/n) < 1 \quad \forall k > 1$, заменив в правой части (6.23) все выражения в скобках на единицу, получим

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!}. \quad (6.24)$$

Замена для $k = \overline{3, n}$ $1/k!$ на $1/2^{k-1} > 1/k!$ лишь усилит это неравенство:

$$x_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

В скобках стоит сумма первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/2$ и первым членом $a_1 = 1$, согласно (1.8) равная

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} = 2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n < 2.$$

Тогда

$$2 \leq x_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (6.25)$$

т.е., по определению 6.2, рассматриваемая последовательность ограничена. Поскольку возрастающая последовательность, по определению 6.1, — частный случай *монотонной*, в силу *признака Вейерштрасса* (см. утверждение 6.1) ограниченная последовательность $\{(1 + 1/n)^n\}$ сходится. Предел этой последовательности, следуя Эйлеру, традиционно обозначают латинской буквой e :

$$\lim \{x_n\} = \lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\} = e. \quad (6.26)$$

Согласно (6.22), замечанию 6.1 и (6.25) $2 \leq e \leq 3$. С точностью $5 \cdot 10^{-6}$ $e \approx 2,71828$.

Отметим, что последовательность $\{z_n\}$ при

$$z_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad (6.27)$$

имеет тот же предел e . В самом деле, при $k < n$ из (6.23)

$$x_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right),$$

и после перехода (согласно теореме 6.5) в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим с учетом (6.26) и (6.27)

$$\lim \{x_n\} = e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = z_k.$$

Это соотношение справедливо для $\forall k \in \mathbb{N}$, в том числе и для $k = n$. В итоге с учетом (6.24) и (6.26) $x_n < z_n \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда по теореме 6.6 о промежуточной последовательности $\lim\{z_n\} = e$.

Обратим внимание, что, хотя элементы последовательности $\{(1 + 1/n)^n\}$ — рациональные числа, число e не является таковым. Оно является *трансцендентным* и принадлежит *подмножеству множества $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел*. Это было установлено в 1873 г. французским математиком Ш. Эрмитом (1822–1901). Число e иногда называют *неперовым* по имени шотландского математика Дж. Непера (1550–1617), который составил таблицы логарифмов с основанием, близким к $1/e$. Таблицы логарифмов с основанием e , получивших впоследствии название *натуральных*, опубликовал в 1618 г. лондонский учитель математики Дж. Спейделл.

6.7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 6.5. *Сходящаяся последовательность с пределом, равным нулю, называют бесконечно малой (б.м.).* Этому определению соответствует запись в символической форме

$$\lim\{\alpha_n\} = 0 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon). \quad (6.28)$$

Последовательности (6.3) и (6.5), как это видно из примера 6.3, являются б.м. Последовательность $\{x_n\}$ при условии $x_n \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ также относят к б.м., поскольку для нее $\lim\{x_n\} = 0$. Если б.м. последовательность $\{\alpha_n\}$ к тому же еще и *строго монотонна*, то ее элементы *знакопостоянны*, а именно: для *возрастающей* $\alpha_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, а для *убывающей* $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. При этом используют обозначения $\lim\{\alpha_n\} = -0$ и $\lim\{\alpha_n\} = +0$ (или $\alpha_n \rightarrow -0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\alpha_n \rightarrow +0$

при $n \rightarrow \infty$) соответственно. Элементы б.м. монотонной последовательности не меняют знака: они неположительны для неубывающей и неотрицательны для невозрастающей последовательности.

В силу свойств (6.10) и (6.11) суммы и произведения сходящихся последовательностей (см. теорему 6.4) сумма или произведение б.м. последовательностей есть б.м. последовательность.

Теорема 6.8. Произведение б.м. последовательности $\{\alpha_n\}$ и ограниченной $\{x_n\}$ есть б.м. последовательность, или с учетом определения 6.2 ограниченной последовательности

$$(\lim\{\alpha_n\}=0) \wedge (\exists M > 0: \forall n \in \mathbb{N} |x_n| \leq M) \Rightarrow \lim\{\alpha_n x_n\}=0.$$

◀ Согласно (6.28) для произвольного числа $\varepsilon/M > 0$ существует такой номер N , что $|\alpha_n| < \varepsilon/M$ при $n > N$. Тогда с учетом условия теоремы

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

а это, по определению 6.5, означает, что последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ б.м. ►

Эта теорема дает возможность сделать, например, заключение о пределе последовательности $\{(\sin n)/n\}$. В самом деле, $|\sin n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, а согласно (6.8) $\{1/n\}$ — б.м. последовательность. Поэтому $\{(\sin n)/n\}$ — б.м. последовательность и

$$\lim \left\{ \frac{\sin n}{n} \right\} = 0.$$

Определение 6.6. Последовательность $\{v_n\}$ называют *бесконечно большой* (6.6.) (или *стремящейся к бесконечному пределу*) и используют обозначение $\lim\{v_n\} = \infty$ (или $v_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$), если для любого сколь угодно большого положительного числа M можно указать *натуральное* число N , такое, что начиная с номера $N + 1$ все элементы

этой последовательности по *абсолютному значению* превышают число M , или

$$\lim\{v_n\} = \infty : \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists N(M) \in \mathbb{N} : \quad (n > N \Rightarrow |v_n| > M). \quad (6.29)$$

Если последовательность $\{v_n\}$ к тому же еще и монотонна (в частности, строго монотонна), то начиная с некоторого номера ее элементы знакопостоянны, причем для неубывающей (в частности, возрастающей) они положительны, а для невозрастающей (в частности, убывающей) — отрицательны. Тогда используют обозначения $\lim\{v_n\} = +\infty$ (или $v_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$) и $\lim\{v_n\} = -\infty$ (или $v_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$) соответственно. В более общих случаях:

$$\lim\{v_n\} = +\infty : \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists N(M) \in \mathbb{N} : \quad (n > N \Rightarrow v_n > M), \quad (6.30)$$

$$\lim\{v_n\} = -\infty : \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists N(M) \in \mathbb{N} : \quad (n > N \Rightarrow v_n < -M). \quad (6.31)$$

Таким образом, произвольная *окрестность* $(-\infty, -M)$ или $(M, +\infty)$ одной из *бесконечных точек* $(+\infty$ или $-\infty)$ *расширенной числовой прямой* содержит начиная с некоторого номера все элементы последовательности, стремящейся к этой точке (к $+\infty$ или к $-\infty$). Записи (6.29) соответствует *объединение* таких окрестностей:

$$(-\infty, -M) \cup (M, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [-M, M]. \quad (6.32)$$

В отличие от сходящихся последовательностей, которые сходятся к *конечному пределу*, б.б. последовательности (как и последовательности, не имеющие ни конечного, ни бесконечного предела) называют *расходящимися*.

Некоторые свойства сходящихся последовательностей (см. 6.4) можно распространить и на б.б. последовательности.

Если (6.32) считать окрестностью одной условной бесконечной точки ∞ на расширенной числовой прямой, то о таких последовательностях можно сказать, что они имеют только один бесконечный предел. Для последовательностей, стремящихся к $+\infty$ и $-\infty$, верны утверждения теоремы 6.3 о знакопостоянстве элементов последовательности, имеющей ненулевой предел, и следствия 6.1 о сохранении знака пределом последовательности, если ее элементы знакопостоянны.

Теорему 6.6 о промежуточной последовательности при условиях, что $x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и что последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ стремятся к одинаковому бесконечному пределу (либо к $+\infty$, либо к $-\infty$), можно рассматривать как признак существования такого предела у последовательности $\{y_n\}$.

Утверждение 6.4. Если начиная с некоторого номера $N+1$ элементы некоторой последовательности $\{z_n\}$ по абсолютному значению не меньше элементов б.б. последовательности $\{x_n\}$, то последовательность $\{z_n\}$ — б.б., т.е.

$$\left(\exists \lim \{x_n\} = \infty \right) \wedge \left(\exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |z_n| \geq |x_n| \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \lim \{z_n\} = \infty.$$

В качестве дополнения к признаку Вейерштрасса сходимости ограниченной монотонной последовательности можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 6.5. Неограниченная монотонная последовательность сходится к бесконечному пределу, причем неубывающая — к $+\infty$, а невозрастающая — к $-\infty$.

Ясно, что понятие фундаментальности (см. определение 6.4) и критерий Коши (см. утверждение 6.3) не применимы к б.б. последовательностям. Теорема 6.4 об арифметических действиях со сходящимися последовательностями может быть лишь частично распространена на б.б. и б.м. последовательности. В условии теоремы 6.4 примем, что $\lim \{x_n\} = a \in \mathbb{R}$

и $\lim\{y_n\} = A$, где A соответствует одному из символов в табл. 6.1, в которой указаны пределы суммы и произведения последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ и обращения $\{y_n\}$ при условии, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \neq 0$.

Таблица 6.1

A	∞	$+\infty$	$-\infty$	0	$+0$	-0
$\lim\{x_n + y_n\}$	∞	$+\infty$	$-\infty$	a	a	a
$\lim\{x_n y_n\}$	∞ ($a \neq 0$)	$+\infty$ ($a > 0$)	$-\infty$ ($a > 0$)	0	$+0$ ($a > 0$)	-0 ($a > 0$)
		$-\infty$ ($a < 0$)	$+\infty$ ($a < 0$)		-0 ($a < 0$)	$+0$ ($a < 0$)
$\lim\{1/y_n\}$	0	$+0$	-0	∞	$+\infty$	$-\infty$

При оговоренном условии обращение б.м. последовательности приводит к б.б. последовательности, и наоборот. После умножения на последовательность с конечным ненулевым пределом б.м. и б.б. последовательности остаются соответственно б.м. и б.б.

Вместе с тем арифметические действия с б.б. и б.м. последовательностями могут привести к **неопределенностям** типа $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞ , $0/0$. В этих случаях непосредственно не удастся сразу сделать вывод о поведении последовательности, равной разности или отношению двух б.б., произведению б.м. и б.б., частному двух б.м. последовательностей. Чтобы „раскрыть неопределенность“, обычно необходимо специальное исследование. Раскрытие неопределенности вида ∞/∞ рассмотрено в примере 6.7.

Пример 6.10. Пусть $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ — б.б. последовательности с различными сочетаниями выражений для v_n и w_n .

а. $v_n = n^2$ и $w_n = 1 - n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, т.е. $\lim\{v_n\} = +\infty$, $\lim\{w_n\} = -\infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n + w_n \equiv 1$ и

$$\frac{v_n}{w_n} = \frac{n^2}{1 - n^2} = \frac{1}{-1 + 1/n^2},$$

так что $\lim\{v_n + w_n\} = 1$ и $\lim\{v_n/w_n\} = -1$.

б. $v_n = n$ и $w_n = -n + 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, так что $\lim\{v_n\} = +\infty$, $\lim\{w_n\} = -\infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n + w_n = 1/n$ и

$$\frac{v_n}{w_n} = \frac{n}{-n + 1/n} = \frac{1}{-1 + 1/n^2};$$

тогда $\lim\{v_n + w_n\} = +0$ и $\lim v_n/w_n = -1$.

в. $v_n = n$ и $w_n = (-1)^n n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, т.е. $\lim\{v_n\} = +\infty$, $\lim\{w_n\} = \infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n + w_n = (1 + (-1)^n)n$ и $v_n/w_n = (-1)^n$, так что $\nexists \lim\{v_n + w_n\}$ и $\nexists \lim\{v_n/w_n\}$.

г. $v_n = -n$ и $w_n = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; при этом $\lim\{v_n\} = -\infty$, $\lim\{w_n\} = +\infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n + w_n = -n + n^2$, $v_n/w_n = -1/n$ и $w_n/v_n = -n$; тогда $\lim v_n + w_n = +\infty$, $\lim v_n/w_n = -0$ и $\lim\{w_n/v_n\} = -\infty$.

Пример 6.11. Покажем, что при $a > 1$ и любом $s \in \mathbb{R}$

$$\lim \left\{ \frac{a^n}{n^s} \right\} = +\infty. \quad (6.33)$$

Положим $a = 1 + \lambda$, где $\lambda > 0$. По формуле (2.8) *бинома Ньютона*

$$a^n = (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2 + \dots + \lambda^n.$$

Отсюда $a^n > n(n-1)\lambda^2/2 > n^2\lambda^2/4$, так как $n-1 > n/2$ при $n > 2$. Поэтому

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n}{4}\lambda^2 = \frac{n}{4}(a-1)^2.$$

Для произвольного числа $M > 0$ рассмотрим неравенство $n(a-1)^2/4 > M$, или

$$n > \frac{4M}{(a-1)^2}.$$

Ясно, что при $n > N = [4M/(a-1)^2]$ будет выполнено неравенство $a^n/n > M$, что, согласно (6.30), означает справедливость (6.33) при $s = 1$.

Отметим, что при $s = 1$ справедливость (6.33) доказана для любого $a > 1$. Поэтому при $a > 1$ и $s \geq 1$ верно

$$\lim \left\{ \frac{(a^{1/s})^n}{n} \right\} = +\infty.$$

Тогда для сколь угодно большого числа $M > 1$ в силу (6.30) $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n > N \quad (a^{1/s})^n/n > M$ и, следовательно, при $n > N$

$$\frac{a^n}{n^s} = \left(\frac{(a^{1/s})^n}{n} \right)^s > \frac{(a^{1/s})^n}{n} > M.$$

Стало быть, (6.33) справедливо для $a > 1$ при $s \geq 1$, а справедливость (6.33) при $s < 1$ следует из неравенства $a^n/n^s > a^n/n$.

Дополнение 6.1. Предельные точки последовательности

Определение 6.7. Точку $x \in \mathbb{R}$ числовой прямой называют *предельной точкой последовательности* $\{x_n\}$, если для любой окрестности $U(x)$ и любого натурального числа N можно найти принадлежащий этой окрестности элемент x_n с номером, большим N , т.е. $x \in \mathbb{R}$ — предельная точка, если

$$\forall U(x) \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N : \quad x_n \in U(x).$$

Иначе говоря, точка x будет предельной для $\{x_n\}$, если в любую ее окрестность попадают элементы этой последовательности с произвольно большими номерами, хотя, возможно, и не все элементы с номерами $n > N$. Поэтому достаточно очевидно следующее утверждение.

Утверждение 6.6. Если $\lim \{x_n\} = b \in \mathbb{R}$, то b — единственная предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

Действительно, в силу определения 6.3 предела последовательности все ее элементы начиная с некоторого номера попадают в любую сколь угодно малую окрестность точки b , а

потому в окрестность никакой другой точки не могут попасть элементы с произвольно большими номерами. Следовательно, условие определения 6.7 выполнимо лишь для единственной точки b .

Однако не всякая предельная точка (иногда ее называют *точкой сгущения*) последовательности является ее *пределом*. Так, последовательность (6.6) не имеет предела (см. пример 6.5), но имеет две предельные точки $x = 1$ и $x = -1$. Последовательность $\{(-1)^n n\}$ в качестве предельных имеет две *бесконечные точки* $+\infty$ и $-\infty$ *расширенной* числовой прямой, *объединение* которых обозначают одним символом ∞ . Именно поэтому можно считать, что бесконечные предельные точки совпадают, а бесконечная точка ∞ , согласно (6.29), является пределом этой последовательности.

Пусть задана последовательность $\{x_n\}$ и пусть числа $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ образуют возрастающую последовательность целых положительных чисел. Тогда последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = x_{k_n}$, называют *подпоследовательностью* исходной последовательности. Очевидно, что если $\{x_n\}$ имеет пределом число b , то любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел, поскольку начиная с некоторого номера все элементы как исходной последовательности, так и любой ее подпоследовательности попадают в любую выбранную окрестность точки b . В то же время любая предельная точка подпоследовательности является предельной и для последовательности.

Теорема 6.9. Из любой последовательности, имеющей предельную точку, можно выбрать подпоследовательность, имеющую своим пределом эту предельную точку.

◀ Пусть b — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Тогда, согласно определению 6.7 предельной точки, для каждого n существует элемент x_{k_n} , принадлежащий окрестности $U(b, 1/n)$ точки b радиуса $1/n$. Подпоследовательность, составленная из точек $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$, где $x_{k_n} \in U(b, 1/n) \forall n \in \mathbb{N}$, имеет пределом точку b . Действительно, при произ-

вольном $\varepsilon > 0$ можно выбрать N , такое, что $1/N < \varepsilon$. Тогда все элементы подпоследовательности, начиная с номера k_N , попадут в ε -окрестность $U(b, \varepsilon)$ точки b , что соответствует условию определения 6.3 предела последовательности. ►

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 6.10. Если некоторая последовательность имеет подпоследовательность с пределом b , то b есть предельная точка этой последовательности.

◄ Из определения 6.3 предела последовательности следует, что начиная с некоторого номера все элементы подпоследовательности с пределом b попадают в окрестность $U(b, \varepsilon)$ произвольного радиуса ε . Поскольку элементы подпоследовательности являются одновременно элементами последовательности $\{x_n\}$, внутри этой окрестности попадают элементы x_n со сколь угодно большими номерами, а это в силу определения 6.7 означает, что b — предельная точка последовательности $\{x_n\}$. ►

Замечание 6.2. Теоремы 6.9 и 6.10 справедливы и в случае, когда предельная точка является бесконечной, если при доказательстве вместо окрестности $U(b, 1/n)$ рассматривать окрестность $U(\infty, n) = \{x \in \mathbb{R}: |x| > n\}$ (или окрестности $U(+\infty, n) = \{x \in \mathbb{R}: x > n\}$ и $U(-\infty, n) = \{x \in \mathbb{R}: x < -n\}$). #

Условие, при котором из последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, устанавливает следующая теорема.

Теорема 6.11 (Больцано — Вейерштрасса). Всякая ограниченная последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

◄ Пусть все элементы последовательности $\{x_n\}$ заключены между числами a и b , т.е. $x_n \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Тогда хотя бы одна из его половин будет содержать бесконечное множество элементов последовательности, так как в противном случае и весь отрезок $[a, b]$ содержал

бы конечное их число, что невозможно. Пусть $[a_1, b_1]$ будет та из половин отрезка $[a, b]$, которая содержит бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$ (или если обе половины таковы, то любая из них).

Аналогично из отрезка $[a_1, b_1]$ выделим его половину $[a_2, b_2]$, содержащую бесконечное множество элементов последовательности, и т.д. Продолжая этот процесс, построим систему вложенных отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

причем $b_n - a_n = (b - a)/2^n$. Согласно *принципу вложенных отрезков* существует точка x , принадлежащая всем этим отрезкам. Эта точка и будет предельной для последовательности $\{x_n\}$. В самом деле, для любой ε -окрестности $U(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ точки x существует отрезок $[a_n, b_n] \subset U(x, \varepsilon)$ (достаточно лишь выбрать n из неравенства $(b - a)/2^n < \varepsilon$), содержащий бесконечное множество элементов последовательности $\{x_n\}$. Согласно определению 6.7 x — предельная точка этой последовательности. Тогда в силу теоремы 6.9 существует подпоследовательность, сходящаяся к точке x . ►

Метод рассуждений, использованный при доказательстве этой теоремы (ее иногда называют леммой Больцано — Вейерштрасса) и связанный с последовательным делением пополам рассматриваемых отрезков, известен под названием **метода Больцано**. Эта теорема значительно упрощает доказательство многих сложных теорем. Она позволяет доказать иным (иногда более простым) путем ряд ключевых теорем.

Дополнение 6.2. Доказательство признака Вейерштрасса и критерия Коши

Сначала докажем утверждение 6.1 (*признак Вейерштрасса сходимости ограниченной монотонной последовательности*). Предположим, что последовательность $\{x_n\}$ неубывающая.

Тогда множество ее значений ограничено сверху и по теореме 2.1 имеет точную верхнюю грань, которую обозначим $\sup\{x_n\} = b \in \mathbb{R}$. В силу свойств точной верхней грани (см. 2.7)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad b - \varepsilon < x_N \leq b. \quad (6.34)$$

Согласно определению 6.1 для неубывающей последовательности имеем $\forall n > N \quad x_n \geq x_N$, или

$$b - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq b.$$

Тогда $|b - x_n| = b - x_n < \varepsilon \quad \forall n > N$, а с учетом (6.34) получим

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \Rightarrow |b - x_n| < \varepsilon),$$

что соответствует определению 6.3 предела последовательности, т.е. $\exists \lim\{x_n\}$ и $\lim\{x_n\} = b \in \mathbb{R}$.

Если последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая, то ход доказательства аналогичен.

Теперь перейдем к доказательству достаточности критерия Коши сходимости последовательности (см. утверждение 6.3), поскольку необходимость условия критерия следует из теоремы 6.7. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. Согласно определению 6.4 по произвольному $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N(\varepsilon)$, такой, что из $m \geq N$ и $n \geq N$ следует $|x_n - x_m| < \varepsilon/3$. Тогда, приняв $m = N$, при $\forall n > N$ получим

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_n < x_N + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (6.35)$$

Поскольку рассматриваемая последовательность имеет конечное число элементов с номерами, не превосходящими N , из (6.35) следует, что фундаментальная последовательность ограничена (см. для сравнения доказательство теоремы 6.2 об ограниченности сходящейся последовательности). Для множества значений ограниченной последовательности существуют точные нижняя и верхняя грани (см. теорему 2.1). Для множества значений элементов при $n > N$ обозначим эти грани

$a_N = \inf_{n>N} x_n$ и $b_N = \sup_{n>N} x_n$ соответственно. С увеличением N точная нижняя грань не уменьшается, а точная верхняя грань не увеличивается, т.е.

$$a_N \leq a_{N+1} \leq b_{N+1} \leq b_N,$$

и получаем систему вложенных отрезков

$$[a_N, b_N] \supseteq [a_{N+1}, b_{N+1}] \supseteq \dots \supseteq [a_{N+k}, b_{N+k}] \supseteq \dots, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Согласно *принципу вложенных отрезков* существует общая точка, которая принадлежит всем отрезкам. Обозначим ее через b . Таким образом, $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{N+k} \leq b \leq b_{N+k}$, а при $n > N + k \quad a_{N+k} \leq x_n \leq b_{N+k}$. Отсюда при $n > N + k$

$$|b - x_n| \leq b_{N+k} - a_{N+k}. \quad (6.36)$$

Теперь из (6.35) $\forall k \in \mathbb{N}$ следует

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leq a_{N+k} \leq b_{N+k} \leq x_N + \frac{\varepsilon}{3},$$

или

$$b_{N+k} - a_{N+k} \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon. \quad (6.37)$$

Из сравнения (6.36) и (6.37) в итоге получим

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad (n > N \Rightarrow |b - x_n| < \varepsilon),$$

что соответствует определению 6.3 предела последовательности, т.е. $\exists \lim\{x_n\}$ и $\lim\{x_n\} = b \in \mathbb{R}$.

Фундаментальные последовательности начал изучать Больцано. Но он не располагал строгой теорией действительных чисел, и поэтому ему не удалось доказать сходимость фундаментальной последовательности. Это сделал Коши, приняв за очевидное принцип вложенных отрезков, который позднее обосновал Кантор. Имя Коши получил не только критерий сходимости последовательности, но и фундаментальную последовательность часто именуют *последовательностью Коши*, а имя Кантора носит *принцип вложенных отрезков*.

Вопросы и задачи

6.1. Доказать, что:

- а) $\lim\{2n/(n^2 + 1)\} = 0$; б) $\lim\{n^{1/n}\} = 1$;
в) $\lim\{q^n\} = 0$ при $|q| < 1$; г) $\lim\{(n!)^{-1/n}\} = 0$;
д) $\lim\{n^m/a^n\} = 0$ при $m \in \mathbb{N}$ и $a > 1$;
е) $\lim\{a^n/n!\} = 0$.

6.2. Привести примеры несходящихся последовательностей с элементами, принадлежащими множествам \mathbb{Q} и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6.3. При каких условиях члены арифметической и геометрической прогрессий образуют убывающую и возрастающую последовательности?

6.4. Доказать соотношения, которые следуют из табл. 6.1.

6.5. Построить примеры последовательностей, стремящихся к бесконечным точкам $+\infty$, $-\infty$, ∞ , и пример последовательности, сходящейся к точке $b \in \mathbb{R}$.

6.6. Может ли неограниченная последовательность не быть 6.6.? Если да, то привести пример.

6.7. Построить пример состоящей из положительных элементов расходящейся последовательности, не имеющей ни конечного, ни бесконечного предела.

6.8. Доказать сходимость последовательности $\{x_n\}$, заданной рекуррентной формулой $x_{n+1} = \sin(x_n/2)$ при условии $x_1 = 1$.

6.9. Доказать, что $\lim\{x_n\} = 0$, если $x_{n+1}/x_n \rightarrow q \in [0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$.

6.10. Может ли сходиться сумма или произведение двух расходящихся последовательностей?

6.11. Может ли расходиться частное двух сходящихся последовательностей?

6.12. Доказать, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то и последовательность $\{x_1 + x_2 + \dots + x_n\}/n$ тоже сходится, причем их пределы равны.

6.13. Являются ли монотонными последовательности $\{-x_n\}$, $\{1/x_n\}$ и $\{x_n^2\}$, если последовательность $\{x_n\}$ возрастающая? Могут ли быть первые три последовательности монотонными, если последовательность $\{x_n\}$ немонотонная?

6.14. Доказать, что если сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ возрастает, то $\lim\{x_n\} = \sup\{x_n\}$.

6.15. Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — возрастающие последовательности и $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$. Доказать, что:

- 1) если $\{y_n\}$ сходится, то и $\{x_n\}$ сходится;
- 2) если $\{x_n\}$ расходится, то и $\{y_n\}$ расходится.

6.16. Доказать, что существует единственная точка z , принадлежащая любому из отрезков, левым концом которого является элемент возрастающей последовательности $\{x_n\}$, а правым — элемент с тем же номером убывающей последовательности $\{y_n\}$, причем $y_n - x_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

6.17. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ определены заданием элементов x_1 и y_1 при условии $0 < y_1 < x_1$ и рекуррентными формулами $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$ и $y_{n+1} = 2x_n y_n / (x_n + y_n)$. Доказать, что эти последовательности строго монотонные и сходятся к одному и тому же пределу. Найти этот предел.

6.18. Доказать сходимость и вычислить предел последовательностей:

а) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$; б) $\left\{ \frac{\sqrt[4]{n^3} \sin n^4}{n+1} \right\};$

в) $\{q^n\}$ при $q \in (0, 1)$; г) $\{a^n/(1+a^n)\}$ при $a > 0$.

6.19. Привести примеры последовательностей, не являющихся фундаментальными.

6.20. Построить последовательность, подпоследовательности которой сходятся к трем различным пределам.

6.21. Построить последовательность, подпоследовательности которой стремятся к бесконечным точкам $+\infty$ и $-\infty$.

6.22. Построить последовательность, имеющую немонотонную сходящуюся подпоследовательность.

6.23. Можно ли выбрать сходящуюся подпоследовательность из неограниченной последовательности?

6.24. Пусть $\lim\{x_n\} = a$. Найти предел (если он существует) последовательностей:

- а) $\{x_{n+1} - x_n\}$; б) $\{x_n + 2x_{n+1}\}$; в) $\{|x_n|\}$; г) $\{[x_n]\}$;
д) $\{x_n x_{n+1}\}$; е) $\{(x_{n+1} - x_n)^n\}$; ж) $\{\operatorname{sgn} x_n\}$.

6.25. Найти $\lim\{x_n\}$, $x_n > 0$, если

- а) $\lim\{x_{n+1}\sqrt{x_n}\} = a > 0$; б) $\lim\{x_n + x_{n-1}\} = 2$;
в) $\lim\{x_n^2 - x_n\} = 2$; г) $\lim\{x_n^2\} = 4$.

6.26. Построить примеры последовательностей рациональных и иррациональных чисел, сходящихся к фиксированной точке $x \in \mathbb{R}$.

7. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Ограничимся изучением только *действительных функций действительного переменного*, которые будем называть просто функциями. При рассмотрении вопросов, связанных с пределом функции, используют понятие *проколотой окрестности* $\mathring{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$ точки $a \in \mathbb{R}$ *числовой прямой*, т.е. *окрестности* $U(a)$ за исключением самой точки a . Аналогично для проколотой δ -окрестности

$$\mathring{U}(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R}: 0 < |x - a| < \delta\}. \quad (7.1)$$

Проколотые окрестности *бесконечных точек* $+\infty$, $-\infty$ и их *объединения* ∞ считают совпадающими с окрестностями этих точек, т.е. при $M \geq 0$

$$\mathring{U}(+\infty) = U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > M\} = (M, +\infty),$$

$$\mathring{U}(-\infty) = U(-\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x < -M\} = (-\infty, -M),$$

$$\mathring{U}(\infty) = U(\infty) = \{x \in \mathbb{R}: |x| > M\} = \mathbb{R} \setminus [-M, M].$$

7.1. Определение предела функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную, по крайней мере, в некоторой *проколотой окрестности* $\mathring{U}(a)$ точки $a \in \bar{\mathbb{R}}$ *расширенной числовой прямой*.

Определение 7.1. Точку $b \in \bar{\mathbb{R}}$ называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $a \in \bar{\mathbb{R}}$ (или при x , стремящемся к a) и обозначают $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, если, какова бы ни была окрестность

$V(b)$ точки b , найдется проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такая, что $f(\mathring{U}(a)) \subset V(b)$, т.е.

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \Leftrightarrow \forall V(b) \exists \mathring{U}(a) : f(\mathring{U}(a)) \subset V(b). \quad (7.2)$$

Для обозначения предела иногда пишут $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ (или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$) и читают „ $f(x)$ стремится к b при x , стремящемся к a “.

Это достаточно общее определение предела функции. Отметим, что точки a и b расширенной числовой прямой не обязательно конечны; важно лишь правильно выбрать окрестности, когда эти точки конечны и когда они таковыми не являются.

Любая окрестность конечной точки содержит некоторую ε -окрестность этой точки, и обратно, любая ε -окрестность точки является ее окрестностью. Поэтому для конечных точек a и b при условии, что область определения рассматриваемой функции включает некоторую проколота окрестность точки a , вместо определения 7.1 с учетом (7.1) можно сформулировать следующее определение.

Определение 7.2. Точку $b \in \mathbb{R}$ называют *пределом функции* $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$ (или при x , стремящемся к $a \in \mathbb{R}$), если, каково бы ни было положительное число ε , найдется положительное число δ , такое, что для всех точек проколота δ -окрестности точки a значения функции принадлежат ε -окрестности точки b , или

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon). \quad (7.3)$$

Запись $\delta(\varepsilon)$ в (7.3) подчеркивает, что значение δ зависит от выбора ε .

Рис. 7.1 иллюстрирует определение 7.2. Для нахождения δ при заданном ε по графику функции следует най-

ти ближайшие к a точки x_1 и x_2 , в которых функция принимает значения $b - \varepsilon$ и $b + \varepsilon$ соответственно, и положить δ равным меньшему из расстояний от точки a до найденных точек. Это несложно сделать при графической иллюстрации, но для получения формулы, выражающей функциональную зависимость

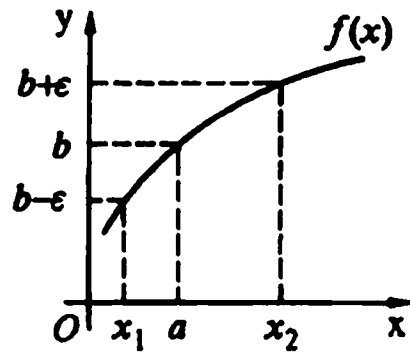


Рис. 7.1

δ от ε , часто необходимо решать непростые уравнения. Чтобы этого избежать, стараются оценить $|f(x) - b|$ через $|x - a|$ и найти ограничения на последнюю величину. Отметим еще раз, что, согласно определениям 7.1 и 7.2, точка a может и не принадлежать области определения функции, а если и принадлежит, то значение $f(a)$ не учитывают.

Пример 7.1. а. Покажем, что если $f(x) = c = \text{const}$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c. \quad (7.4)$$

Действительно, при любом x $f(x) - c = c - c = 0 < \varepsilon$, если ε — произвольное положительное число. Поэтому в качестве δ можно взять любое положительное число.

б. Проверим, что $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$ и предположим, что $|x^2 - 4| < \varepsilon$. С учетом того, что

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x - 2)(x + 2)| = \\ &= |x - 2| \cdot |(x - 2) + 4| \leq |x - 2| (|x - 2| + 4), \end{aligned}$$

достаточно рассмотреть неравенство $|x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$, эквивалентное

$$|x - 2| < -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}.$$

Поэтому для выполнения условия $|x^2 - 4| < \varepsilon$ в (7.3) достаточно выбрать $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$.

в. Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|. \quad (7.5)$$

Согласно (1.5) $||x| - |a|| \leq |x - a|$. Поэтому в (7.3) достаточно положить $\delta = \varepsilon$. Действительно, при $|x - a| < \delta = \varepsilon$ имеем

$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \varepsilon,$$

что, по определению 7.2, означает справедливость (7.5). #

Вернемся к определению 7.1 предела функции в точке и рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в окрестности бесконечной точки $+\infty$. Тогда, расшифровывая окрестности в определении 7.1, можно сформулировать следующие определения.

Определение 7.3. Точку $b \in \mathbb{R}$ называют *пределом функции* $f(x)$ *при стремлении аргумента к* $+\infty$, если, каково бы ни было положительное число ε , найдется положительное число M , такое, что для всех точек окрестности $U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > M\}$ бесконечной точки $+\infty$ значения функции принадлежат ε -окрестности точки b , или

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0 : \quad (7.6)$$

$$(x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon).$$

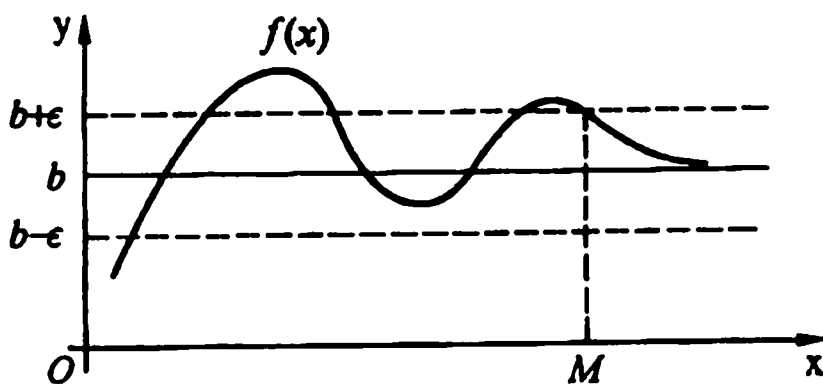


Рис. 7.2

Из рис. 7.2 ясно, как по заданному значению ε выбрать положение точки M , при котором будет выполнено условие этого определения. График функции при $x \rightarrow +\infty$ неограни-

ченно приближается к горизонтальной прямой $y = b$, называемой в этом случае *правосторонней горизонтальной асимптотой* графика функции.

Аналогично можно сформулировать определение предела функции при $x \rightarrow -\infty$ (функция должна быть определена в окрестности бесконечной точки $-\infty$). Если функция $f(x)$ определена в окрестности $U(\infty)$, то можно говорить о пределе функции при $x \rightarrow \infty$:

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0 : \\ (|x| > M \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon). \quad (7.7)$$

В этом случае график функции имеет *двустороннюю горизонтальную асимптоту* $y = b$ (рис. 7.3).

Пусть теперь область определения функции $f(x)$ включает некоторую проколотую окрестность конечной точки $a \in \mathbb{R}$, а значения функции могут являться сколь угодно большими положительными числами. В этом случае определению 7.1 эквивалентно следующее определение.

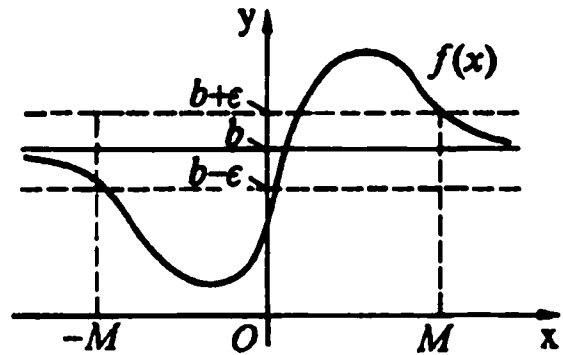


Рис. 7.3

Определение 7.4. Функцию $f(x)$ называют *стремящейся к $+\infty$ при стремлении аргумента к конечной точке a* и условно пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, если, каково бы ни было положительное число E , найдется положительное число δ , такое, что для всех точек проколотой δ -окрестности точки a значения функции принадлежат окрестности $V(+\infty) = \{y \in \mathbb{R} : y > E\}$ бесконечной точки $+\infty$, или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \delta(E) > 0 : \\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > E). \quad (7.8)$$

Рис. 7.4 показывает, как по заданному значению E выбрать значение $\delta = \min \{a - x_1, x_2 - a\}$, при котором будет выполнено условие определения 7.4. При $x \rightarrow a$ график функции не-

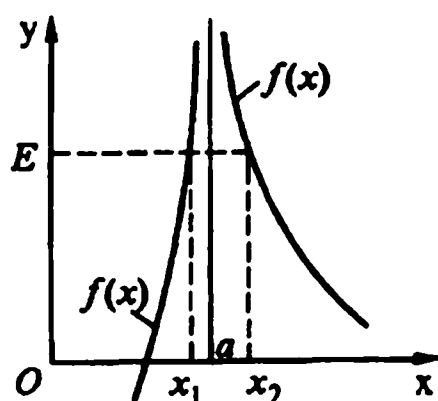


Рис. 7.4

ограниченно приближается к прямой $x = a$, называемой в этом случае его **вертикальной асимптотой**. Аналогично можно дать определение предела функции, если ее область значений включает некоторую окрестность бесконечной точки $-\infty$.

Если функция определена в некоторой проколотой окрестности конечной точки $a \in \mathbb{R}$, а область значений функции включает некоторую окрестность $U(\infty)$, то можно сформулировать следующее определение, эквивалентное определению 7.1.

Определение 7.5. Функцию $f(x)$ называют **стремящейся к ∞ при стремлении аргумента к точке a** и пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (или $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$), если, каково бы ни было положительное число E , найдется положительное число δ , такое, что для всех точек проколотой δ -окрестности точки a значения функции принадлежат окрестности $V(\infty) = \{y \in \mathbb{R}: |y| > E\}$, или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty : \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \delta(E) : \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E). \quad (7.9)$$

Из рис. 7.5 ясно, как по заданному значению E выбрать значение $\delta = \min\{a - x_1, x_2 - a\}$, удовлетворяющее условию определения 7.5. В этом случае график функции имеет вертикальную асимптоту $x = a$. Пусть области определения и значений функции $f(x)$ включают некоторую окрестность вида $U(\infty) = \{z \in \mathbb{R}: |z| > M\}$, $M > 0$.

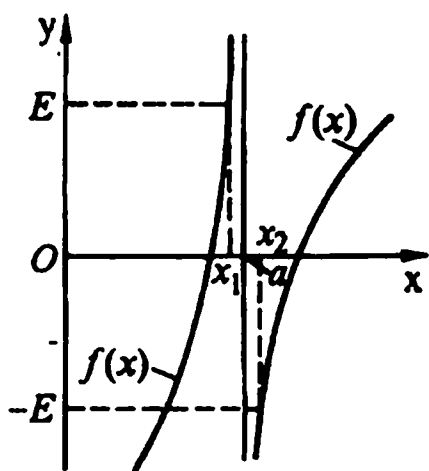


Рис. 7.5

Если в определении 7.1 считать точки a и b соответствующими ∞ , то можно сформулировать следующее определение.

Определение 7.6. Функцию $f(x)$ называют *стремящейся к ∞ при стремлении аргумента к ∞* и пишут $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (или $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$), если, каково бы ни было положительное число E , найдется положительное число M , такое, что для всех точек окрестности $U(\infty) = \{x \in \mathbb{R}: |x| > M\}$ значения функции принадлежат окрестности $V(\infty) = \{y \in \mathbb{R}: |y| > E\}$, или

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty : \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists M(E) > 0 : \quad (|x| > M \Rightarrow |f(x)| > E). \quad (7.10)$$

На рис. 7.6 представлен возможный вариант графика функции $f(x)$, удовлетворяющей условию этого определения.

Отметим, что в случаях (7.8)–(7.10) говорят о *бесконечном пределе функции в точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$* (в отличие от случаев (7.3), (7.6) и (7.7), где речь идет о *конечном пределе*).

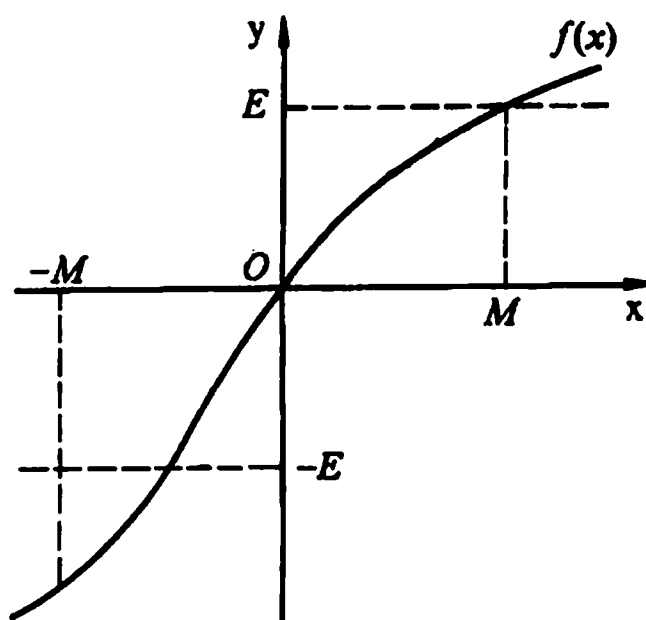


Рис. 7.6

Анализируя все приведенные определения, представляющие, по существу, расширения определения 7.1, заметим, что если функция имеет конечный предел при заданном стремлении аргумента, то достаточно рассматривать для ε сколь угодно малые положительные значения. Когда же функция имеет бесконечный предел, достаточно рассматривать сколь угодно большие значения E .

Пример 7.2. а. Убедимся, что при $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0. \quad (7.11)$$

При произвольно малом $\varepsilon > 0$ предположим, что $a^x < \varepsilon$. Используя свойства логарифмической функции $\log_a x$ при условии $0 < a < 1$, вместо $a^x < \varepsilon$ получим $x > \log_a \varepsilon$. Поскольку $a^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M = \log_a \varepsilon : (x > M \Rightarrow |a^x - 0| < \varepsilon),$$

т.е. (7.11) верно по определению 7.3. Прямая $y = 0$ является правосторонней горизонтальной асимптотой графика функции a^x (см. рис. 3.16).

б. Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0. \quad (7.12)$$

Сначала предположим, что $1/x^2 > E = c^2$ при произвольном $c > 0$, т.е. $x^2 < 1/c^2$ ($x \neq 0$), или $0 < |x| < 1/c$. Итак, первое из выражений (7.12) верно в силу определения 7.4, если в (7.8) выбрать $\delta = 1/c = 1/\sqrt{E}$. Затем при произвольном $\varepsilon > 0$ предположим, что $1/x^2 < \varepsilon$. Тогда $|x| > 1/\sqrt{\varepsilon}$, и верно второе из выражений (7.12), если в (7.7) выбрать $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$. График функции $1/x^2$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и двустороннюю горизонтальную асимптоту $y = 0$ (рис. 7.7).

в. Проверим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty. \quad (7.13)$$

Предположим, что при произвольном $c > 0$ $|x^3| > E = c^3$, т.е. $|x| > c$. Чтобы (7.13) удовлетворяло определению 7.6, достаточно в (7.10) выбрать $M = c = \sqrt[3]{E}$.

г. Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \quad (7.14)$$

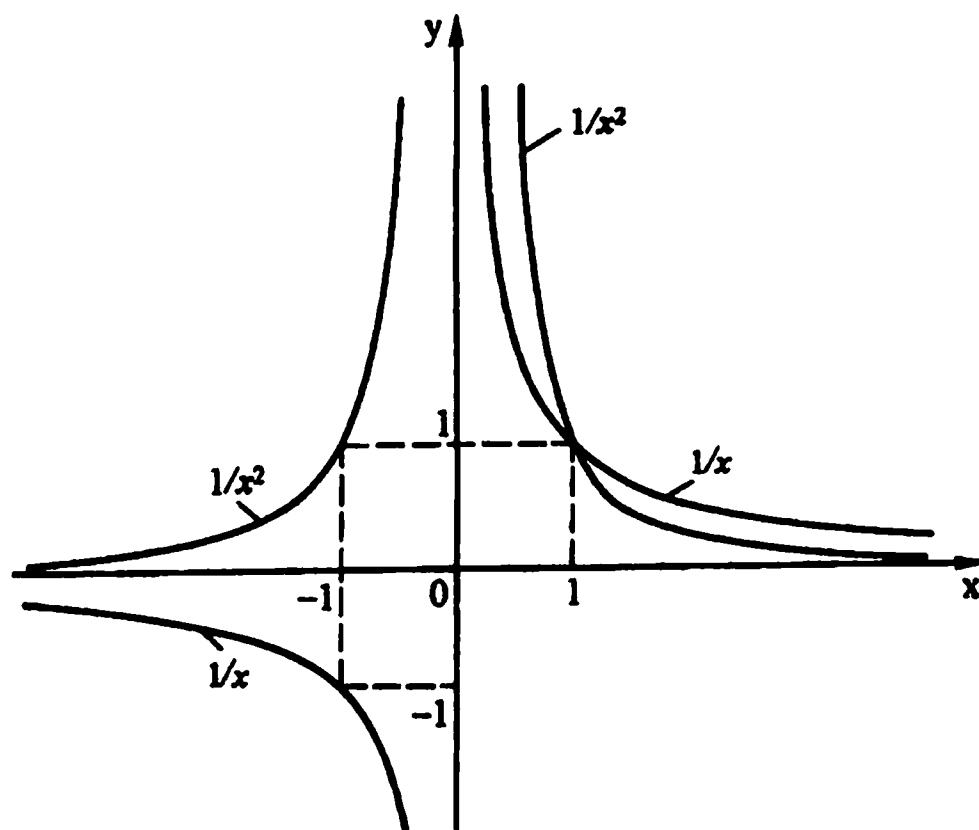


Рис. 7.7

Сначала при произвольном $E > 0$ предположим, что $|1/x| > E$, т.е. $|x| < 1/E$ ($x \neq 0$), и первое из выражений (7.14) верно, согласно определению 7.5, если в (7.9) выбрать $\delta = 1/E$. Затем предположим, что при произвольном $\varepsilon > 0$ $|1/x| < \varepsilon$, т.е. $|x| > 1/\varepsilon$, и будет верным второе из выражений (7.14), если в (7.7) выбрать $M = 1/\varepsilon$. График функции $1/x$ имеет вертикальную ($x = 0$) и горизонтальную ($y = 0$) асимптоты (см. рис. 7.7).

7.2. Односторонние пределы

В 7.1 при определении *предела функции* $f(x)$ в *конечной точке* $a \in \mathbb{R}$ не было наложено никаких ограничений на закон изменения *аргумента* $x \in \mathbb{R}$ при $x \rightarrow a$ в пределах *проколотой окрестности* этой точки. Но точка a может не иметь проколотой окрестности в области $D(f)$ *определения функции* (например, для функции $f(x) = \sqrt{x}$ точка $x = 0$ в $D(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$). Тогда изменение аргумента x при

$x \rightarrow a$ имеет смысл лишь в расположенной по одну сторону от точки a проколотой **полуокрестности** этой точки. Но даже в случае, когда функция определена в проколотой окрестности точки a , для анализа особенностей поведения функции при $x \rightarrow a$ бывает целесообразно ограничить „свободу“ изменения аргумента x одной из проколотых полуокрестностей этой точки. Такое ограничение приводит к понятию **одностороннего предела**.

Пусть область определения функции $f(x)$ включает некоторую **левую проколотую полуокрестность** $\mathring{U}_-(a) = (a - h, a)$, $h > 0$, конечной точки $a \in \mathbb{R}$.

Определение 7.7. Точку $b \in \bar{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой называют **левосторонним пределом функции** $f(x)$ в точке a и пишут $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ (или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a-0$), если, какова бы ни была окрестность $V(b)$ точки b , найдется положительное число δ , такое, что для всех точек проколотой левой полуокрестности $(a - \delta, a)$ точки a значения функции принадлежат окрестности $V(b)$, или

$$b = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) : \Leftrightarrow \forall V(b) \exists \delta > 0 :$$

$$(a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) \in V(b)).$$

Ясно, что определение 7.7 можно конкретизировать для случаев, когда точка b конечна или не является таковой, как это сделано в (7.3), (7.8) и (7.9). Аналогично определяют **правосторонний предел** функции в точке a , когда область определения этой функции включает **правую проколотую полуокрестность** $\mathring{U}_+(a) = (a, a + h)$ точки $a \in \mathbb{R}$ при $h > 0$. Односторонние пределы для краткости часто называют просто **левым** и **правым** и для их значений используют обозначения

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

Чтобы отличить от односторонних, пределы в (7.3), (7.8) и (7.9) называют **двусторонними**. Связь между существованием двустороннего и односторонних пределов функции в точке устанавливает следующая теорема.

Теорема 7.1. Точка $b \in \bar{\mathbb{R}}$ является двусторонним пределом функции $f(x)$ в конечной точке $a \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда b является и левым, и правым пределами этой функции в точке a , или

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \bar{\mathbb{R}} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\exists f(a-0) \wedge (\exists f(a+0)) \wedge (f(a-0) = f(a+0) = b)). \end{aligned}$$

◀ Предположим сначала, что в точке a существует двусторонний предел функции $f(x)$ и этим пределом является точка b . Тогда, согласно определению 7.1, какова бы ни была окрестность $V(b)$ точки b , существует проколота окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , такая, что $f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(b)$. Стало быть, существует при $\delta > 0$ левая полуокрестность $(a - \delta, a)$, такая, что $f(x) \in V(b)$ для всех $x \in (a - \delta, a)$. По определению 7.7, это означает, что существует левый предел $f(a-0)$ и им является точка b . Подобно этому заключаем, что существует и правый предел $f(a+0)$ и им также является точка b .

Предположим теперь, что существуют пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ и каждым из них является точка b . По определению 7.7, это означает, что, какова бы ни была окрестность $V(b)$ точки b , существуют при $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ проколотые левая $(a - \delta_1, a)$ и правая $(a, a + \delta_2)$ полуокрестности точки a , такие, что $\forall x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_2) = \overset{\circ}{U}(a) \cdot f(x) \in V(b)$. Таким образом, имеем проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , такую, что $f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(b)$. Согласно определению 7.1 это означает, что точка b является двусторонним пределом данной функции в точке a . ►

Отметим, что пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ часто считают односторонними пределами функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и в случае их равенства обозначают "двусторонним" пределом $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, что формально не противоречит теореме 7.1. И наоборот, если существует предел функции при $x \rightarrow \infty$, то существуют равные ему пределы этой функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$.

При необходимости более детального изучения поведения функции в окрестности точки $a \in \bar{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой вводят в рассмотрение *верхнюю* $V_+(b)$ и *нижнюю* $V_-(b)$ *полуокрестности* точки $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Ясно, что для конечной точки $b \in \mathbb{R}$ при $\varepsilon > 0$

$$V_+(b) = \{y \in \mathbb{R}: b \leq y < b + \varepsilon\}$$

и

$$V_-(b) = \{y \in \mathbb{R}: b - \varepsilon < y \leq b\}.$$

Пусть область определения функции $f(x)$ включает некоторую проколотую окрестность $\mathring{U}(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$.

Определение 7.8. Функцию $f(x)$ называют *стремящейся к точке $b \in \mathbb{R}$ сверху при стремлении аргумента к точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$* и пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + 0$ (или $f(x) \rightarrow b + 0$ при $x \rightarrow a$), если, какова бы ни была верхняя полуокрестность $V_+(b)$ точки b , найдется проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такая, что для всех ее точек значения функции принадлежат $V_+(b)$, или

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + 0 : \Leftrightarrow \forall V_+(b) \exists \mathring{U}(a) : \quad (7.15)$$

$$f(\mathring{U}(a)) \subset V_+(b).$$

Вместо (7.15) в случае конечной точки a можно написать

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b + 0 : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$$

$$(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow b \leq f(x) < b + \varepsilon).$$

На рис. 7.8 показано, как выбрать $\delta = \min \{a - x_1, x_2 - a\}$, чтобы удовлетворить условию определения 7.8. Аналогичным образом можно сформулировать определения, соответствующие обозначениям

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= b - 0, \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) &= b + 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= b - 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

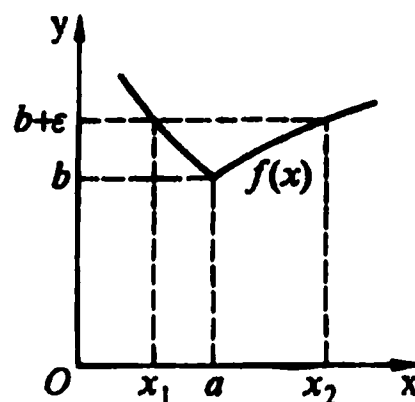


Рис. 7.8

и им подобным.

Окрестности бесконечных точек $+\infty$ и $-\infty$ расширенной числовой прямой можно считать соответственно нижней $V_-(\infty) = V(+\infty)$ и верхней $V_+(\infty) = V(-\infty)$ полуокрестностями для ∞ . Тогда функцию $f(x)$, удовлетворяющую определению 7.4, следует назвать стремящейся к ∞ снизу при $x \rightarrow a$, поскольку при изменении x значения функции остаются в нижней полуокрестности $V_-(\infty)$, а в случае $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ можно говорить о стремлении функции $f(x)$ к ∞ сверху при $x \rightarrow a$, так как при изменении x значения функции остаются в верхней полуокрестности $V_+(\infty)$. Случаи $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ соответствуют стремлению функции к ∞ снизу и сверху при стремлении аргумента x к ∞ слева, а случаи $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ — при стремлении аргумента x к ∞ справа.

Пример 7.3. а. Покажем, что при $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +0} a^{1/x} = +0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -0} a^{1/x} = +\infty, \quad (7.17)$$

т.е. что функция $a^{1/x}$ стремится к нулю сверху при стремлении аргумента x к нулю справа и стремится к $+\infty$ (к ∞ снизу) при стремлении x к нулю слева. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon \in (0, 1)$ и предположим, что $a^{1/x} < \varepsilon$. Тогда $1/x > \log_a \varepsilon$ и $0 < x < 1/\log_a \varepsilon$. Итак,

$$\forall \varepsilon \in (0, 1) \exists \delta = 1/\log_a \varepsilon : (0 < x < \delta \Rightarrow a^{1/x} \in (0, \varepsilon)),$$

а это и означает, что первое равенство в (7.17) верно.

Теперь при произвольном $E > 1$ предположим, что $a^{1/x} > E$, т.е. $1/\log_a E < x < 0$. Тогда

$$\forall E > 1 \exists \delta_E = -1/\log_a E: (-\delta_E < x < 0 \Rightarrow a^{1/x} > E).$$

Это означает справедливость и второго равенства в (7.17). Поведение функции $a^{1/x}$ в окрестности точки $x=0$ иллюстрирует рис. 7.9.

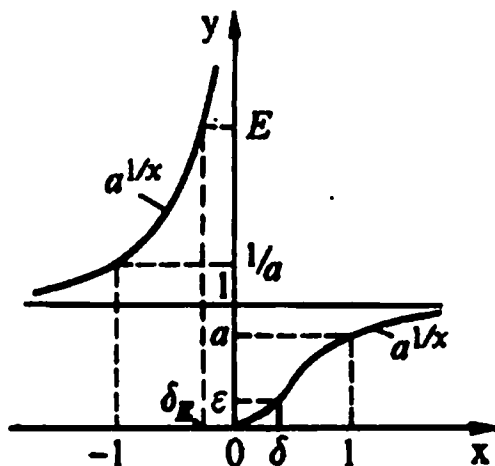


Рис. 7.9

б. Убедимся, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - 0, \quad (7.18)$$

т.е. функция $\operatorname{arctg}(1/x)$ стремится к $\pi/2$ снизу при стремлении x к нулю справа. При произвольном $\varepsilon > 0$ предположим, что справедливо неравенство $\pi/2 - \varepsilon \leq \operatorname{arctg}(1/x) < \pi/2$. Функция $\operatorname{tg} x$

возрастает в интервале $(0, \pi/2)$. Поэтому при выполнении предыдущего условия $\operatorname{tg}(\pi/2 - \varepsilon) < \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1/x))$, или $0 < x < \operatorname{ctg}(\pi/2 - \varepsilon)$. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right): \left(0 < x < \delta \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \in \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

а это и означает, что (7.18) верно. #

Отметим, что для доказательства того или иного предельного соотношения мы предполагаем выполнение требуемого в определении предела неравенства (вида $|f(x)| > E$, $|f(x) - b| < \varepsilon$ и т.п.) и находим ограничения, которые следует наложить на изменение аргумента x . Эти ограничения позволяют выбрать значения δ (или M), о которых идет речь в соответствующих определениях предела, а затем „обратным ходом“ убеждаемся, что при выбранных δ (или M) справедливы требуемые неравенства для функции.

7.3. Признаки существования предела

Стремление аргумента x функции $f(x)$ к точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой можно, в частности, представить последовательностью $\{x_n\}$ значений x_n аргумента функции, имеющей эту точку своим пределом. В случае конечной точки a следует предположить, что x_n не должны совпадать с a ($x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$), поскольку в точке a функция может быть не определена, а если даже она и определена, то значение $f(a)$ не учитывают при рассмотрении ее предела в этой точке (см. определение 7.1). Соответствующие x_n значения $f(x_n)$ образуют последовательность $\{f(x_n)\}$, поведение которой позволяет судить о существовании в точке a предела функции $f(x)$.

Теорема 7.2. Функция $f(x)$ имеет в точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой предел $b \in \bar{\mathbb{R}}$ (конечный или бесконечный) тогда и только тогда, когда для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$, элементы которой не совпадают с a , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции имеет своим пределом точку b , или

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \{x_n\} : (\lim \{x_n\} = a) \wedge (x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim \{f(x_n)\} = b.$$

◀ Сначала предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке a предел b . Тогда, по определению 7.1 предела функции, для произвольной окрестности $V(b)$ точки b найдется такая проколота окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , что $f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(b)$. Для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$, элементы которой не совпадают с a , в силу определений 6.3 и 6.6 найдется номер N , такой, что $x_n \in \overset{\circ}{U}(a) \quad \forall n > N$. Следовательно, для произвольной окрестности $V(b)$ существует такой номер N , что $\forall n > N \quad f(x_n) \in f(\overset{\circ}{U}(a)) \subset V(b)$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел b (см. определения 6.3 и 6.6).

Пусть теперь соответствующая любой стремящейся к точке a последовательности $\{x_n\}$ последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел b . Предположим, что точка $b \in \bar{\mathbb{R}}$ не является пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$. По *принципу двойственности* (см. 1.4 и 1.5) в символической записи (7.2) определения 7.1 предела функции при отрицании условия этого определения следует поменять местами кванторы \forall и \exists , знак $=$ заменить на \neq , а символ \subset заменить на $\not\subset$:

$$b \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \Leftrightarrow \exists V(b) : \forall \mathring{U}(a) \quad f(\mathring{U}(a)) \not\subset V(b). \quad (7.19)$$

Это означает, что существует окрестность $V(b)$ точки b , такая, что, как бы ни была мала проколота окрестность $\mathring{U}(a)$, в ней найдется точка x , для которой $f(x) \notin V(b)$. Будем придавать номеру n последовательно значения 1, 2, 3, ... и рассматривать проколотые окрестности вида $\mathring{U}(a, 1/n) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < 1/n\}$ для конечной точки a и вида $\mathring{U}(a, n) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > n\}$ — в противном случае. Тогда для каждого n у любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$ найдется в $\mathring{U}(a, 1/n)$ (или в $\mathring{U}(a, n)$) элемент x_n , такой, что $f(x_n) \notin V(b)$, но это противоречит определениям 6.3 и 6.6 по отношению к последовательности $\{f(x_n)\}$, имеющей пределом точку $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Следовательно, (7.19) неверно, а справедливо противоположное утверждение (7.2), соответствующее определению 7.1. Таким образом, предел функции $f(x)$ в точке a существует и совпадает с точкой b . ►

Замечание 7.1. В формулировке теоремы 7.2 достаточно предположить лишь существование предела у каждой последовательности $\{f(x_n)\}$, отвечающей любой последовательности $\{x_n\}$, для которой $\lim\{x_n\} = a$, чтобы отсюда вытекало совпадение пределов всех последовательностей $\{f(x_n)\}$. Действительно, пусть для двух последовательностей $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ с пределом a $\lim\{f(x'_n)\} = b'$ и $\lim\{f(x''_n)\} = b''$, причем b' не

совпадает с b'' . Тогда, перемежая элементы x'_n и x''_n , составим новую последовательность

$$\{x_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_n, x''_n, \dots\}, \quad \dots$$

которая также стремится к a , поскольку начиная с некоторого номера n значения и x'_n , и x''_n попадают в произвольную окрестность точки a . Но соответствующая $\{x_n\}$ последовательность $\{f(x_n)\}$ не имеет предела, так как не удастся указать такой номер $N+1$, начиная с которого все элементы $\{f(x_n)\}$ попадают в произвольную окрестность какой-либо одной точки, что является условием существования предела последовательности (см. определения 6.3 и 6.6). Это противоречие доказывает, что из существования пределов последовательностей вида $\{f(x_n)\}$ следует совпадение всех этих пределов. #

Теорема 7.2 позволяет дать определение, эквивалентное определению 7.1.

Определение 7.9. Точку $b \in \bar{\mathbb{R}}$ называют *пределом функции* $f(x)$ в точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$ (или при x , стремящемся к a), если для любой имеющей пределом точку a последовательности $\{x_n\}$ значений $x_n \in \mathbb{R}$ аргумента функции, не совпадающих с a , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений $f(x_n)$ функции имеет пределом точку b . Символические формы записи для этого определения и теоремы 7.2 совпадают.

Пример 7.4. При $f(x) = x$ из определения 7.9 следует, что

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a,$$

поскольку для любой стремящейся к точке a последовательности $\{x_n\}$ $f(x_n) = x_n$ и $\lim\{f(x_n)\} = \lim\{x_n\} = a$. #

Определение 7.1 и все последующие его вариации называют определением предела функции по Коши, а определение 7.9 связывают с именем немецкого математика Г. Гейне (1821–1881).

Ясно, что каждому из определений 7.2–7.8 можно дать эквивалентное определение по Гейне предела функции через последовательности. Определение 7.9 удобно использовать, когда возникают сомнения в существовании предела функции в данной точке. Если можно построить хотя бы одну последовательность $\{x_n\}$ с пределом в точке a , такую, что последовательность $\{f(x_n)\}$ не имеет предела, то можно сделать вывод о том, что функция $f(x)$ не имеет предела в этой точке. Если для двух различных последовательностей $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$, имеющих одинаковый предел a , последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ имеют различные пределы, то в этом случае также не существует $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Пример 7.5. Пусть $f(x) = \sin(1/x)$. График этой функции

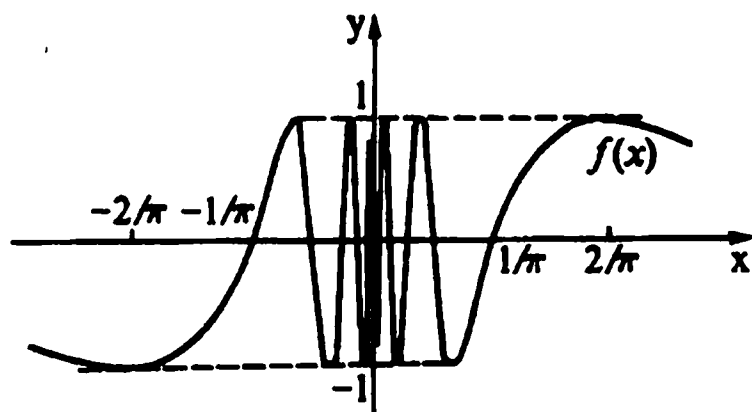


Рис. 7.10

показан на рис. 7.10, но получить из него представление о ее поведении в окрестности точки $x=0$ трудно. Проверим, существует ли предел данной функции в этой точке.

Выберем сначала сходящуюся к этой точке по-

следовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n}{n\pi} \right\}.$$

Ясно, что $x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim\{x_n\} = 0$. Тогда $f(x_n) = \sin((-1)^n n\pi) \equiv 0$ и $\lim\{f(x_n)\} = 0$.

Затем возьмем сходящуюся к той же точке последовательность

$$\{x'_n\} = \left\{ \frac{2}{(4n+1)\pi} \right\},$$

для которой $\lim\{x'_n\} = +0$, $f(x'_n) = \sin((4n+1)\pi/2) \equiv 1$ и $\lim\{f(x'_n)\} = 1$.

Для последовательности

$$\{x_n''\} = \left\{ -\frac{2}{(4n+1)\pi} \right\},$$

также сходящейся к точке $x=0$ ($\lim\{x_n''\} = -0$), имеем $f(x_n'') = \sin(-(4n+1)\pi/2) \equiv -1$, а поэтому $\lim\{f(x_n'')\} = -1$.

Все три „пробные“ последовательности дали разные результаты, что противоречит условию определения 7.9, т.е. данная функция не имеет предела в точке $x=0$. Нетрудно установить, что данная функция не имеет в точке $x=0$ и односторонних пределов. Для $\{x_n\} = \{1/(n\pi)\}$ $\lim\{1/(n\pi)\} = +0$, $f(x_n) \equiv 0$ и $\lim\{f(x_n)\} = 0$, тогда как $\lim\{f(x_n')\} = 1$, т.е. $f(x)$ не имеет в точке $x=0$ предела справа. Аналогичным путем можно установить отсутствие у $f(x)$ в этой точке и предела слева.

Пример 7.6. Покажем, что функция $f(x) = \sin x$ при $x \rightarrow \infty$ не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного). Для имеющих бесконечный предел последовательностей $\{x_n\} = \{(-1)^n n\pi\}$ и $\{x_n'\} = \{(-1)^n (4n+1)\pi/2\}$ найдем $f(x_n) = \sin((-1)^n n\pi) \equiv 0$ и $f(x_n') = \sin((-1)^n (4n+1)\pi/2) = (-1)^n$, т.е. в силу определения 7.9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ не существует (ни конечный, ни бесконечный). #

Теорема 7.2 и определение 7.9 предела функции в точке через последовательности позволяют перенести на функции многие свойства, установленные для последовательностей. Прежде всего используем эту возможность для формулирования признаков существования предела функции в точке. Следуя теореме 6.6, можно сформулировать для „зажатой“ (или „промежуточной“) функции такое утверждение.

Утверждение 7.1. Если в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a определены функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, для которых $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ для любого x из этой окрестности, и функции $f(x)$ и $h(x)$ имеют в точке a одинаковый

предел, то в этой точке существует такой же предел функции $g(x)$, или

$$(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}) \wedge \\ \wedge (f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in \mathring{U}(a)) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b. \quad (7.20)$$

◀ Действительно, по определению 7.9, для любой последовательности $\{x_n\}$ с пределом в точке a , элементы которой не совпадают с a , последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{h(x_n)\}$ имеют предел b , причем $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу теоремы 6.6 следует, что и последовательность $\{g(x_n)\}$ имеет предел b , т.е., по определению 7.9, существует предел функции $g(x)$ в точке a , причем $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$. ▶

Критерию Коши сходимости последовательности отвечает критерий Коши существования конечного предела функции.

Утверждение 7.2. Функция $f(x)$ имеет в точке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ конечный предел тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathring{U}(a) : \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}(a) \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \quad (7.21)$$

◀ В самом деле, пусть в точке a существует конечный предел функции $f(x)$, равный b . В силу определений 7.1 и 7.2 имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathring{U}(a) : |f(x) - b| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in \mathring{U}(a).$$

Тогда с учетом (1.4) выполняется условие

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - b) + (b - f(x_2))| \leq \\ \leq |f(x_1) - b| + |f(x_2) - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in \mathring{U}(a),$$

откуда следует необходимость критерия.

Обратно, для любой последовательности $\{x_n\}$ ($x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$), такой, что $\lim \{x_n\} = a \in \overline{\mathbb{R}}$, можно указать номер $N + 1$,

начиная с которого все элементы этой последовательности попадают в такую проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$, что в ней будет выполнено условие (7.21). Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall m, n > N \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

т.е., по определению 6.4, последовательность $\{f(x_n)\}$ значений $f(x_n)$ функции $f(x)$ *фундаментальна* и, согласно критерию Коши (см. утверждение 6.3), сходится к конечному пределу. Поэтому в силу теоремы 7.2 с учетом замечания 7.1 функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке $a \in \bar{R}$. ►

Для *монотонной функции* можно сформулировать признак существования предела, аналогичный *признаку Вейерштрасса сходимости ограниченной монотонной последовательности*. Предварительно введем локальные понятия монотонности и ограниченности функции. Функцию называют *неубывающей* (невозрастающей) при $x \rightarrow a - 0$ (или при $x \rightarrow a + 0$), если существует интервал $(a - h, a)$ (или $(a, a + h)$), $h > 0$, в котором она не убывает (не возрастает). Такую функцию именуют *монотонной* при $x \rightarrow a - 0$ (или при $x \rightarrow a + 0$). Функцию называют *ограниченной сверху* (снизу) при $x \rightarrow a - 0$ (или при $x \rightarrow a + 0$), если существует интервал $(a - h, a)$ (или $(a, a + h)$), $h > 0$, в котором она ограничена сверху (снизу).

Утверждение 7.3. Монотонная и ограниченная сверху (снизу) при $x \rightarrow a - 0$ (или при $x \rightarrow a + 0$) функция имеет при $x \rightarrow a - 0$ (или при $x \rightarrow a + 0$) конечный предел. Если при $x \rightarrow a - 0$ (или при $x \rightarrow a + 0$) функция не убывает (не возрастает) и не ограничена сверху (снизу), то она имеет при $x \rightarrow a - 0$ (или при $x \rightarrow a + 0$) бесконечный предел $+\infty$ ($-\infty$).

7.4. Свойства функций, имеющих конечный предел

Используя определение 7.1 и эквивалентное ему определение 7.9 *предела функции* через последовательности, перенесем

некоторые их свойства на функции, имеющие предел в точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой.

1. Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то этот предел единственный (в силу единственности предела сходящейся последовательности $\{f(x_n)\}$ значений функции для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента — см. теорему 6.1).

2. Функция $f(x)$, имеющая в точке a конечный предел $b \in \mathbb{R}$, ограничена (см. определение 3.5) в некоторой проколотой окрестности этой точки (для доказательства достаточно использовать (7.3)).

3. Если функция $f(x)$ имеет в точке a отличный от нуля конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности этой точки значения функции сохраняют знак предела (в противном случае можно было бы построить последовательность $\{f(x_n)\}$, сходящуюся к ненулевому конечному пределу и не сохраняющую знак своего предела, что противоречит теореме 6.3).

4. Знакопостоянная в некоторой проколотой окрестности точки a функция $f(x)$ не может иметь в этой точке предел другого знака (в силу сохранения пределом знака элементов каждой сходящейся последовательности $\{f(x_n)\}$ — см. следствие 6.1).

5. Если в некоторой проколотой окрестности точки a функция $f(x)$ равна постоянному числу c , то и предел функции в этой точке равен c (согласно (6.9) для последовательности $\{f(x_n)\}$, элементы которой равны постоянному числу).

6. Если в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a определены функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие в этой точке конечные пределы, то в силу теоремы 6.5 получим правило перехода к пределу в неравенстве

$$\begin{aligned}
 (\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)) \wedge (\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)) \wedge (\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) f(x) \leq g(x)) &\Rightarrow \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).
 \end{aligned}$$

Замечание 7.2. Если неравенство строгое, т.е. $f(x) < g(x)$, то в случае существования пределов этих функций их пределы в общем случае могут быть связаны лишь нестрогим неравенством. Так, при $x > 1$ $1/x^2 < 1/x$, но

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(см. (7.12) и (7.14)). #

7. Если в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a значения функции $f(x)$ не больше (не меньше) b , то в силу следствия 6.4 ее предел в этой точке (если он существует) не больше (не меньше) b .

Теорема 6.4 и следствие 6.2 об арифметических операциях со сходящимися последовательностями в сочетании с определением 7.9 позволяют установить для функций, имеющих в точке a конечные пределы, следующие правила предельного перехода:

1) в *линейной комбинации* любого конечного числа m функций $f_k(x)$, $k = \overline{1, m}$ ($m \in \mathbb{N}$), при $c_k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^m c_k f_k(x) &= \sum_{k=1}^m c_k b_k; \quad (7.22) \end{aligned}$$

2) в их *произведении*

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \prod_{k=1}^m f_k(x) &= \prod_{k=1}^m b_k; \quad (7.23) \end{aligned}$$

3) в частном *двух функций* $f(x)$ и $g(x)$, при условии, что предел делителя отличен от нуля,

$$(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b) \wedge (\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \neq 0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}. \quad (7.24)$$

Из (7.23) в силу того, что $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ (см. пример 7.4), получим

$$\lim_{x \rightarrow a} x^m = \left(\lim_{x \rightarrow a} x \right)^m = a^m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Тогда для многочлена (3.19)

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

с учетом (7.22) имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} a + a_n = P_n(a), \quad (7.25)$$

а с учетом (7.24) для рациональной функции (3.24) получим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} P_m(x)}{\lim_{x \rightarrow a} Q_n(x)} = \frac{P_m(a)}{Q_n(a)} \quad (7.26)$$

при условии, что $Q_n(a) \neq 0$.

7.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 7.10. Функцию $f(x)$ называют *бесконечно малой* (б.м.) при $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$, если при этом стремлении аргумента предел функции равен нулю, т.е. с учетом определения предела

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \text{б.м.} &: \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 : \Leftrightarrow \\ &: \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \quad |f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Понятие б.м. функции неразрывно связано с указанием об изменении ее аргумента. Можно говорить о б.м. функции при $x \rightarrow a+0$, когда $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$, и при $x \rightarrow a-0$, когда $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = 0$. Обычно б.м. функции обозначают первыми буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Пример 7.7. а. Функция $f(x) = x$ является б.м. при $x \rightarrow 0$, поскольку ее предел в точке $a = 0$ равен нулю (см. пример 7.4). Согласно теореме 7.1 о связи двустороннего предела с односторонними эта функция — б.м. как при $x \rightarrow +0$, так и при $x \rightarrow -0$.

б. Функция $1/x$ в силу (7.14) — б.м. при $x \rightarrow \infty$ (а также при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$). Эта функция при $x = n \in \mathbb{N}$ образует бесконечно малую последовательность $\{1/n\}$. #

Отличное от нуля постоянное число, сколь бы оно ни было мало по абсолютному значению, не является б.м. функцией. Для постоянных чисел исключение составляет лишь нуль, поскольку функция $f(x) \equiv 0$ в силу (7.4) имеет нулевой предел.

Теорема 7.3. Функция $f(x)$ имеет в точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой конечный предел, равный числу b , тогда и только тогда, когда эта функция равна сумме этого числа b и б.м. функции $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$, или

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (f(x) = b + \alpha(x)) \wedge (\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0). \quad (7.27)$$

◀ Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел b . Согласно определениям 7.1 и 7.2 предела имеем: $\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a): |f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Но это в силу определения 7.10 означает, что функция $f(x) - b$ — б.м. при $x \rightarrow a$, которую обозначим $\alpha(x)$. Отсюда $f(x) = b + \alpha(x)$.

Пусть теперь $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$. Тогда, согласно определению 7.10 б.м. функции, имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a): \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \quad |\alpha(x)| = |f(x) - b| < \varepsilon,$$

а это означает, что в точке a существует предел функции $f(x)$ и он равен b . ►

Из (7.22) при $c_k = 1 \quad \forall k = \overline{1, m}, \quad m \in \mathbb{N}$, следует очевидное утверждение.

Утверждение 7.4. Сумма конечного числа функций, б.м. при $x \rightarrow a$, есть снова б.м. при $x \rightarrow a$, т.е.

$$\forall k = \overline{1, m}, m \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} \alpha_k(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^m \alpha_k(x) = 0. \quad (7.28)$$

Ограничение в (7.28) конечным m существенно. Так, при $m \rightarrow \infty$ предел суммы из m одинаковых слагаемых $1/m$, каждое из которых имеет нулевой предел, отличен от нуля и равен единице.

Из (7.23) вытекает также очевидное утверждение.

Утверждение 7.5. Произведение любого числа функций, б.м. при $x \rightarrow a$, есть снова б.м. при $x \rightarrow a$, или

$$\forall k = \overline{1, m}, m \in \mathbb{N} \quad \exists \lim_{x \rightarrow a} \alpha_k(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \prod_{k=1}^m \alpha_k(x) = 0. \quad (7.29)$$

При вычислении пределов часто полезна следующая теорема.

Теорема 7.4. Произведение функции, б.м. при $x \rightarrow a$, и функции, *ограниченной* в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , есть функция, б.м. при $x \rightarrow a$.

◀ Для ограниченной в $\overset{\circ}{U}(a)$ функции $f(x)$ можно указать число $C > 0$, такое, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \quad |f(x)| \leq C$ (см. определение 3.5). По определению 7.10, для б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overset{\circ}{U}_1(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Тогда

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap \overset{\circ}{U}_1(a) \quad |\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon,$$

а это, согласно определению 7.10, означает, что функция $\alpha(x)f(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$. ►

Ясно, что произведение постоянной функции и б.м. при $x \rightarrow a$ есть функция, б.м. при $x \rightarrow a$.

Определение 7.11. Функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой* (б.б.) при $x \rightarrow a \in \overline{\mathbb{R}}$, если при этом стремлении аргумента функция имеет бесконечный предел, т.е. с учетом определения 7.5

$$\begin{aligned} f(x) \text{ — б.б.} &: \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \\ &: \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \quad |f(x)| > E. \end{aligned}$$

Подобно б.м. функциям понятие б.б. функции неразрывно связано с указанием об изменении ее аргумента. Можно говорить о б.б. функции при $x \rightarrow a + 0$ и $x \rightarrow a - 0$, когда $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ соответственно. Термин „бесконечно большая“ говорит не об абсолютном значении функции, а о характере его изменения в окрестности рассматриваемой точки. Никакое постоянное число, как бы велико оно ни было по абсолютному значению, не является бесконечно большим.

Пример 7.8. а. Функция $1/x$ в силу (7.14) — б.б. при $x \rightarrow 0$ (как и при $x \rightarrow +0$ и при $x \rightarrow -0$).

б. Функция $f(x) = x$ — б.б. при $x \rightarrow \infty$, поскольку $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$. Действительно, по определению 7.6 $|f(x)| > E \quad \forall E > 0$ при $|x| > M = E$. #

Если выполнены условия определений

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty &: \Leftrightarrow \\ &: \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \quad f(x) > E, \quad (7.30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty &: \Leftrightarrow \\ &: \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \quad f(x) < -E, \quad (7.31) \end{aligned}$$

то говорят о *положительной* (*отрицательной*) б.б. при $x \rightarrow a$ функции.

Пример 7.9. Функция $1/x^2$ в силу (7.12) — положительная б.б. при $x \rightarrow 0$ (а также при $x \rightarrow +0$ и при $x \rightarrow -0$). #

Связь между б.б. и б.м. функциями устанавливает следующая теорема.

Теорема 7.5. Если $f(x)$ — б.б. при $x \rightarrow a$ функция, то $1/f(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$. Если $\alpha(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$ функция, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a , то $1/\alpha(x)$ — б.б. при $x \rightarrow a$.

◀ Пусть функция $f(x)$ — б.б. при $x \rightarrow a$. При произвольном $\varepsilon = 1/M > 0$, по определению 7.11, найдется такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , что $\forall x \in \mathring{U}(a) \quad |f(x)| > E = 1/\varepsilon$. Тогда $|1/f(x)| = 1/|f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathring{U}(a)$, т.е., по определению 7.10, функция $1/f(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$.

Если функция $\alpha(x)$ — б.м. при $x \rightarrow a$, отличная от нуля в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a , то, по определению 7.10, для произвольного $M = 1/\varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $\mathring{U}_1(a)$ этой точки, такая, что $\forall x \in \mathring{U}(a) \cap \mathring{U}_1(a) \quad |\alpha(x)| < \varepsilon = 1/E$, т.е. $|1/\alpha(x)| = 1/|\alpha(x)| > E$. Согласно определению 7.11 это означает, что функция $1/\alpha(x)$ — б.б. при $x \rightarrow a$. ►

Приведем несколько достаточно очевидных и полезных на практике свойств б.б. функций. Эти свойства непосредственно следуют из определения 7.11 б.б. функции и свойств функций, имеющих конечные пределы, а также из теоремы 7.5 о связи между б.б. и б.м. функциями.

1. Произведение конечного числа функций, б.б. при $x \rightarrow a$, есть функция, б.б. при $x \rightarrow a$. Действительно, если $f_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, — б.б. функции при $x \rightarrow a$, то в некоторой проколотой окрестности точки a $f_k(x) \neq 0$, и по теореме 7.5 $1/f_k(x)$ — б.м. функция при $x \rightarrow a$. В силу (7.29) $\prod_{k=1}^n 1/f_k(x)$ — функция,

б.м. при $x \rightarrow a$, и по теореме 7.5 $\prod_{k=1}^n f_k(x)$ — б.б. функция при $x \rightarrow a$.

2. Произведение функции, б.б. при $x \rightarrow a$, и функции, которая в некоторой проколотой окрестности точки a по абсолютному значению больше положительной постоянной, есть функция, б.б. при $x \rightarrow a$. В частности, произведение функции, б.б. при $x \rightarrow a$, и функции, имеющей в точке a конечный ненулевой предел, будет б.б. функцией при $x \rightarrow a$. В самом деле, пусть $f(x)$ — б.б. функция при $x \rightarrow a$ и $|g(x)| > C > 0$ при $x \in \overset{\circ}{U}_1(a)$ (если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \neq 0$, то в силу свойства 3 (см. 7.4) функции сохранять знак предела имеем $\exists \overset{\circ}{U}_1(a): \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \quad |g(x)| > C > 0$). Тогда $\forall E > 0 \quad \exists \overset{\circ}{U}_2(a): |f(x)| > E/C \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(a)$. При $x \in \overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_1(a) \cap \overset{\circ}{U}_2(a)$ получим $|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| > (E/C)C = E$, а это в силу определения 7.11 означает, что $f(x)g(x)$ — б.б. функция при $x \rightarrow a$.

3. Сумма ограниченной в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_1(a)$ точки a функции и б.б. при $x \rightarrow a$ функции есть функция, б.б. при $x \rightarrow a$. Действительно, пусть $f(x)$ — б.б. функция при $x \rightarrow a$, а $|g(x)| < C$ ($C > 0$) при $x \in \overset{\circ}{U}_1(a)$. Тогда

$$\forall E > 0 \quad \exists \overset{\circ}{U}_2(a): |f(x)| > E + C \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(a).$$

С учетом свойства (1.4) абсолютного значения

$$|f(x)| = |f(x) + g(x) - g(x)| \leq |f(x) + g(x)| + |g(x)|,$$

и при $x \in \overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_1(a) \cap \overset{\circ}{U}_2(a)$ получаем $|f(x) + g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)| > E + C - C = E$, а это, по определению 7.11, означает, что $f(x) + g(x)$ — б.б. функция при $x \rightarrow a$.

Например, функции $x + \sin x$ и $x + \cos x$ — б.б. при $x \rightarrow \infty$.

4. Сумма двух функций, б.б. при $x \rightarrow a$, есть неопределенность. В зависимости от знака слагаемых характер изменения такой суммы может быть самым различным. Например:

а) $f(x) = x$ и $g(x) = 2x$ — функции, б.б. при $x \rightarrow \infty$,
 $f(x) + g(x) = 3x$ — функция, б.б. при $x \rightarrow \infty$;

б) $f(x) = x$ и $g(x) = -x$ — функции, б.б. при $x \rightarrow \infty$,
 $f(x) + g(x) \equiv 0$ — функция, б.м. при $x \rightarrow \infty$;

в) $f(x) = x + \sin x$ и $g(x) = -x$ — б.б. при $x \rightarrow \infty$ функции (функция $f(x)$ — б.б. согласно свойству 3), функция $f(x) + g(x) = \sin x$ не имеет предела при $x \rightarrow \infty$ (см. пример 7.6), но ограничена в силу неравенства $|\sin x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Любая функция, б.б. при $x \rightarrow a$, не удовлетворяет определению 3.5 ограниченной в любой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$ точки a функции и поэтому в $\mathring{U}(a)$ будет

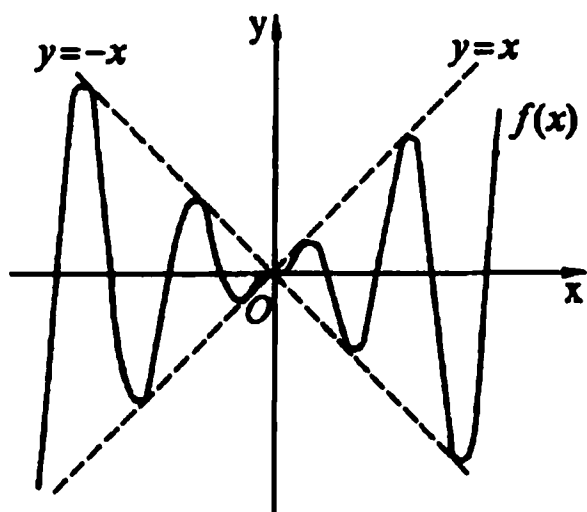


Рис. 7.11

неограниченной функцией. Но обратное утверждение неверно: не всякая неограниченная в $\mathring{U}(a)$ функция является б.б. при $x \rightarrow a$. Характерный пример — функция $f(x) = x \sin x$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}: |x| > M\}$ не ограничена (ее график на рис. 7.11 не удастся ограничить горизонтальными прямыми), но не имеет при $x \rightarrow \infty$

предела. В самом деле, для б.б. последовательностей $\{x_n\} = \{(-1)^n n\pi\}$ и $\{x'_n\} = \{(-1)^n (4n+1)\pi/2\}$ получаем

$$f(x_n) = (-1)^n n\pi \cdot \sin((-1)^n n\pi) \equiv 0,$$

а

$$f(x'_n) = (-1)^n \frac{(4n+1)\pi}{2} \cdot \sin\left((-1)^n \frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \frac{(4n+1)\pi}{2},$$

что противоречит условию определения 7.9 предела.

Пример 7.10. Покажем, что при $a > 1$ и $\forall s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^s} = +\infty. \quad (7.32)$$

Согласно (6.33) $\lim\{a^n/n\} = +\infty$. Тот же предел имеет и последовательность $\{a^n/(n+1)\}$. Следовательно, по выбранному произвольно $E > 1$ в силу (6.30) найдется такое натуральное число $N \in \mathbb{N}$, что при $n > N$ выполнимо неравенство $a^n/(n+1) > E$. Пусть теперь $x > N+1$. Если положить $n = [x]$, то $n > N$ и $n < x < n+1$, так что $a^x/x > a^n/(n+1) > E$, что и доказывает справедливость (7.32) при $s = 1$.

Полагая $s > 1$, по аналогии с примером 6.11 при достаточно больших значениях x имеем $a^x/x^s = ((a^{1/s})^x/x)^s > (a^{1/s})^x/x$. Итак, (7.32) верно при $s \geq 1$. При $s < 1$ (7.32) верно в силу неравенства $a^x/x^s > a^x/x \quad \forall x > 1$.

7.6. Предел сложной функции

Теорема 7.6. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел b и не принимает значения b в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ этой точки, а функция $g(y)$ имеет в точке b конечный предел c , то сложная функция $g(f(x))$ имеет предел в точке a и он равен c .

◀ Согласно определению 7.9 предела функции по Гейне

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b : \Leftrightarrow \forall \{x_n\} : (\lim \{x_n\} = a, x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}) \\ \exists \lim \{f(x_n)\} = b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c : \Leftrightarrow \forall \{y_n\} : (\lim \{y_n\} = b, y_n \neq b \quad \forall n \in \mathbb{N}) \\ \exists \lim \{g(y_n)\} = c. \end{aligned}$$

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная стремящаяся к точке a последовательность и $x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\lim \{f(x_n)\} = b$, но $f(x_n) \neq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Положим $y_n = f(x_n)$. Поскольку $\lim \{y_n\} = b$ и $y_n \neq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$, имеем $\lim \{g(y_n)\} = c$, т.е.

$$\forall \{x_n\} : (\lim \{x_n\} = a, x_n \neq a \quad \forall n \in \mathbb{N}) \quad \exists \lim \{g(f(x_n))\} = c,$$

что в силу определения 7.9 и доказывает теорему. ►

Эту теорему нетрудно распространить на суперпозицию более двух функций. Она позволяет использовать замену переменных при вычислении пределов сложных функций по формуле

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) \quad (7.33)$$

при выполнении условий теоремы 7.6. При этом говорят, что под знаком предела в левой части (7.33) сделана замена $f(x) = y$. Теорема 7.6 и возможность замены переменных остаются в силе, если хотя бы одна из точек a , b , c будет соответствовать одной из бесконечных точек $+\infty$ или $-\infty$ (или их объединению ∞) на расширенной числовой прямой.

Пример 7.11. а. Для нахождения предела функции $\operatorname{arctg}(1/(1-x))$ при $x \rightarrow 1-0$ сделаем замену $y = 1/(1-x)$. Тогда при $x \rightarrow 1-0$ $y \rightarrow +\infty$ и согласно (7.33) с учетом (7.18)

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y = \frac{\pi}{2} - 0.$$

б. Рассмотрим функцию $|\operatorname{sgn}(x \sin(1/x))|$ при $x \rightarrow 0$. Обозначим $y = f(x) = x \sin(1/x)$ и $g(y) = |\operatorname{sgn} y|$. При $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow 0$ в силу теоремы 7.4 (как произведение б.м. при $x \rightarrow 0$ функции x и ограниченной в любой проколотой окрестности точки $x = 0$ функции $\sin(1/x)$). В свою очередь, при $y \rightarrow 0$ с учетом (3.3) (см. рис. 3.6, а) $g(y) \rightarrow 1$. Отсюда, казалось бы, при $x \rightarrow 0$ сложная функция $g(f(x)) = |\operatorname{sgn}(x \sin(1/x))| \rightarrow 1$. Однако в любой проколотой окрестности точки $x = 0$ функция $\sin(1/x)$ имеет нули, так что сложная функция $g(f(x))$ принимает значения и 0, и 1. В силу критерия Коши существования конечного предела функции (см. утверждение 7.2) эта функция не может в этой точке иметь предел. Дело в том, что в данном случае теорема 7.6 неприменима, поскольку в любой проколотой окрестности точки $x = 0$ функция $f(x)$ принимает значение, равное значению ее предела в этой точке.

7.7. Два замечательных предела

Рассмотренные свойства *функций*, имеющих *предел* в точке $a \in \bar{\mathbb{R}}$ *расширенной числовой прямой*, дают возможность проанализировать их поведение в *окрестности* этой точки. Но в ряде случаев этих свойств и установленных правил предельного перехода недостаточно. Одним из классических примеров этого является поведение функции $(\sin x)/x$ в окрестности точки $a = 0$.

Пусть x — центральный угол или длина дуги окружности единичного радиуса (рис. 7.12), причем $0 < x < \pi/2$. Сравнение площадей S_1 треугольника OAB , S_2 сектора AOB и S_3 треугольника OAD дает $S_1 < S_2 < S_3$. Но при $OA = 1$ $S_1 = (\sin x)/2$, $S_2 = x/2$, $S_3 = (\operatorname{tg} x)/2$ и тогда

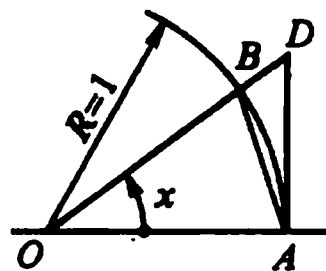


Рис. 7.12

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Покажем сначала, что

$$|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.34)$$

Действительно, при $x \in (0, \pi/2)$ (7.34) следует из левой части предыдущего двойного неравенства. При $x \geq \pi/2$ (7.34) очевидно в силу неравенства $|\sin x| \leq 1$. В (7.34) входят четные функции. Поэтому (7.34) верно и при $x < 0$. Наконец, при $x = 0$ в (7.34) имеем равенство.

Из (7.34) сразу следует

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1. \quad (7.35)$$

В самом деле, в силу неравенств $|\sin x - 0| \leq |x|$ и $|\cos x - 1| = 2\sin^2(x/2) \leq x^2/2$ в (7.3) достаточно положить $\delta = \varepsilon$ для доказательства первого предела в (7.35) и $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ для доказательства второго.

Теперь вернемся к двойному неравенству. Из его левой части следует, что при $x \in (0, \pi/2)$ $(\sin x)/x < 1$. Это неравенство верно и при $x \in (-\pi/2, 0)$, так как $(\sin x)/x$ является четной функцией. Из правой части двойного неравенства следует, что при $x \in (0, \pi/2)$ $\cos x < (\sin x)/x$. Это неравенство в силу четности входящих в него функций также верно и при $x \in (-\pi/2, 0)$. Итак,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\},$$

т.е. функция $(\sin x)/x$ заключена между двумя функциями, имеющими при $x \rightarrow 0$ одинаковый предел, равный 1. Поэтому, согласно утверждению 7.1, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (7.36)$$

называемый **первым замечательным пределом**.

Геометрический смысл (7.36) состоит в том, что по мере уменьшения центрального угла x (см. рис. 7.12) длины дуги сектора и стягивающей ее хорды сближаются. С помощью (7.36) можно вычислить некоторые пределы, которые не удастся вычислить только на основе полученных ранее результатов из-за возникновения под знаком предела так называемой *неопределенности* типа $0/0$.

Пример 7.12. а. Учитывая (7.23), (7.24), (7.35) и (7.36), получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1. \quad (7.37)$$

б. С учетом (7.4), (7.23), (7.33) и (7.36) вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = \left| \begin{array}{l} y = 5x, \\ y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right| = 5 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 5 \cdot 1 = 5.$$

в. Принимая во внимание (7.4), (7.23), (7.33) и (7.36), найдем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \sin^2 3x}{9x^2} = \left| \begin{array}{l} y = 3x, \\ y \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{array} \right| = 9 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} = \\ &= 9 \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \right)^2 = 9. \end{aligned}$$

г. Используя (7.4), (7.23), (7.24), (7.33) и (7.36), вычислим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \right) = \\ &= \frac{5}{3} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{3}. \quad \# \end{aligned}$$

Теперь убедимся в справедливости равенства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad (7.38)$$

называемого **вторым замечательным пределом**.

Пусть $x > 1$. Тогда

$$1 \leq [x] \leq x < [x] + 1, \quad (7.39)$$

где $[x]$ — *целая часть* числового значения x (см. 3.2), или после обращения

$$\frac{1}{[x] + 1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]} \leq 1.$$

Отсюда

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}.$$

Все части этого неравенства больше единицы. Поэтому после их возведения в положительные степени, показателями которых служат соответствующие части неравенства (7.39), получим

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1} \right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^{[x] + 1} \quad (7.40)$$

Согласно (6.26) при $N \ni n \rightarrow \infty \quad \lim \{(1 + 1/n)^n\} = e$. Тогда с учетом (6.11) и (6.12) (см. теорему 6.4 об арифметических действиях над сходящимися последовательностями)

$$\begin{aligned} \lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\} &= \lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right\} = \\ &= \lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \cdot \lim \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\} = e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \right\} &= \lim \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \right\} = \\ &= \frac{\lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right\}}{\lim \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} \right\}} = \frac{e}{1} = e. \end{aligned}$$

Согласно (6.7) (см. определение 6.3 предела последовательности) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что при $n > N$

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right| < \varepsilon.$$

Тогда при $x > N + 1$ $[x] = n > N$ и с учетом (7.40) получим

$$e + \varepsilon > \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} > e - \varepsilon,$$

или $|(1 + 1/x)^x - e| < \varepsilon$. Это означает, согласно определению 7.3

предела функции при стремлении аргумента к $+\infty$, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (7.41)$$

Пусть теперь $x \rightarrow -\infty$. Положим $x = -u$ и тогда при $x \rightarrow -\infty$ $u \rightarrow +\infty$. После тождественных преобразований получим

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^u = \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right).$$

Согласно (7.33) проведем замену переменных и с учетом (7.23) и (7.41) найдем

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \cdot \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

В итоге при любом способе стремления x к бесконечности справедливо (7.38).

Функция $y = 1/x$ в силу (7.14) — б.м. при $x \rightarrow \infty$, т.е. $y \rightarrow 0$. Как следствие из (7.38) заменой переменных по (7.33) при условии, что $y \neq 0$ при $x \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e. \quad (7.42)$$

На первый взгляд результат в (7.42) (да и в (7.38)) парадоксален: при $y \rightarrow 0$ $1 + y \rightarrow 1$, а единица в любой степени единица! Но вследствие того, что показатель степени $1/y$ при $y \rightarrow 0$ является б.б. функцией, а основание степени все же не единица, хотя и отличается от нее на б.м. при $y \rightarrow 0$ функцию (см. 7.5), предел больше единицы. Изменение значений функции $g(y) = (1 + y)^{1/y}$ при уменьшении y показано ниже (напомним, что в 6.6 было приведено приближенное значение $e \approx 2,71828$).

y	1	1/2	1/3	1/4	0,1	0,01	0,001	0,0001
$g(y)$	2	2,250	2,370	2,441	2,594	2,7047	2,7169	2,7181

По существу, (7.38) и (7.42) позволяют, как говорят, „раскрыть“ неопределенность типа 1^∞ .

Пример 7.13. Вычисление предела функции

$$f(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

при $x \rightarrow \infty$ приводит к неопределенности именно такого типа. После тождественных преобразований

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = \left(\frac{1 + 1/x^2}{1 - 2/x^2} \right)^{x^2} = \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{1/x^2}} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{2}{-2/x^2}}$$

положим $1/x^2 = y$ и $-2/x^2 = z$. Тогда

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = (1 + y)^{1/y} (1 + z)^{1/z} (1 + z)^{1/z}.$$

Если $x \rightarrow \infty$, то и $y \rightarrow 0$, и $z \rightarrow 0$, так что после замены переменных по (7.33), учитывая (7.23) и (7.42), получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{1/z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{1/z} = e^3.$$

7.8. Экспонента, натуральные логарифмы и гиперболические функции

В математическом анализе и в прикладных задачах число e играет заметную роль. В частности, оно служит основанием *показательной функции* e^x (иногда пишут $\exp x$), называемой *экспоненциальной* (или просто *экспонентой*), и *обратной* к ней *логарифмической функции* $\ln x = \log_e x$, графики которых приведены на рис. 7.13. Там же дан график функции $e^{-x} = \exp(-x)$. Логарифмы с основанием e называют **натуральными**. Для них основное логарифмическое тождество имеет вид

$$e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x. \quad (7.43)$$

Функция $\ln x$ обладает всеми свойствами логарифмической функции с основанием, большим единицы. Справедливы известные формулы перехода от одного основания к другому, в частности

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \ln 10 \cdot \lg x = 2,3026 \lg x,$$

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e \cdot \ln x = 0,4343 \ln x.$$

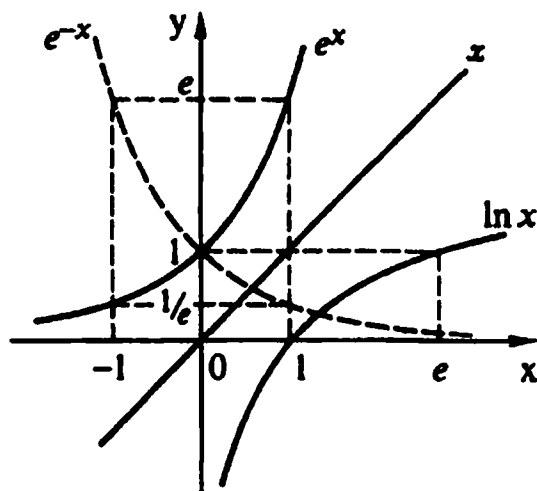


Рис. 7.13

Таким образом, e^x и $\ln x$ являются частными случаями (при основании $a = e$) основных элементарных функций: показательной a^x и логарифмической $\log_a x$.

Пример 7.14. Пусть перед началом работы ракетного двигателя ракета имеет массу m_0 и скорость v_0 . Процесс работы двигателя условно разделим на большое число $n \in \mathbb{N}$ этапов (рис. 7.14). На первом этапе со скоростью w относительно ракеты отбрасывается некоторая масса Δm_1 продуктов сгорания топлива. В результате, согласно закону сохранения количества движения (без учета влияния атмосферы и поля тяготения)

$$m_0 v_0 = (m_0 - \Delta m_1) v_1 + \Delta m_1 (v_0 - w),$$

возникает приращение скорости ракеты

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0 = w \frac{\Delta m_1}{m_0 - \Delta m_1} = w \frac{\Delta m_1}{m_1},$$

где $m_1 = m_0 - \Delta m_1$ — масса ракеты после первого этапа работы двигателя. Подобным образом на втором этапе

$$\Delta v_2 = v_2 - v_1 = w \frac{\Delta m_1}{m_1 - \Delta m_2} = w \frac{\Delta m_2}{m_2}$$

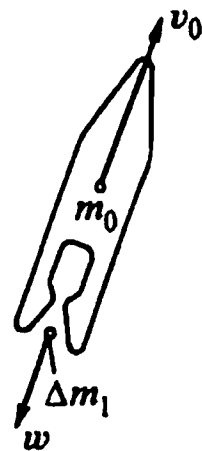


Рис. 7.14

и т.д. Этапы работы двигателя выберем так, чтобы $\Delta v_1 = \Delta v_2 = \dots = \Delta v_n = \Delta v$. Тогда можно написать

$$\frac{\Delta v}{w} = \frac{\Delta m_1}{m_1} = \frac{\Delta m_2}{m_2} = \dots = \frac{\Delta m_n}{m_n}$$

и

$$1 + \frac{\Delta v}{w} = 1 + \frac{\Delta m_1}{m_1} = 1 + \frac{\Delta m_2}{m_2} = \dots = 1 + \frac{\Delta m_n}{m_n}.$$

С учетом того, что

$$1 + \frac{\Delta m_1}{m_1} = \frac{m_0}{m_1}, \quad 1 + \frac{\Delta m_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

и т.д., имеем

$$\left(1 + \frac{\Delta v}{w}\right)^n = \frac{m_0}{m_k}, \quad (7.44)$$

где через m_k обозначена масса ракеты в конце работы двигателя (после n этапов), когда скорость ракеты составляет

$$v_k = v_0 + \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots + \Delta v_n = v_0 + n\Delta v.$$

Обозначим $w/\Delta v = x$. Тогда

$$n = \frac{v_k - v_0}{\Delta v} = x \frac{v_k - v_0}{w}$$

и с учетом (7.44)

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{m_0}{m_k}\right)^{\frac{w}{v_k - v_0}}. \quad (7.45)$$

Реальный процесс горения топлива в двигателе протекает не по отдельным этапам, а непрерывно, т.е. число этапов $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $x = nw/(v_k - v_0) \rightarrow \infty$. Переходя в (7.45) к пределу при $x \rightarrow \infty$, с учетом (7.38) получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \left(\frac{m_0}{m_k}\right)^{\frac{w}{v_k - v_0}}.$$

После логарифмирования по основанию e придем к известной формуле Циолковского

$$v_k = v_0 + w \ln \frac{m_0}{m_k} \quad (7.46)$$

для идеальной скорости ракеты, движущейся в пустоте вне поля тяготения. Отношение m_0/m_k — число Циолковского — характеризует совершенство конструкции ракеты. Чем это число больше (см. график функции $\ln x$ на рис. 7.13), тем бóльшую долю составляет запас топлива от начальной массы m_0 ракеты, тем выше относительный прирост $(v_k - v_0)/w$ ее скорости и выше ее конечная скорость v_k . Скорость w истечения продуктов сгорания топлива характеризует совершенство ракетного двигателя. С ее увеличением также растет конечная скорость ракеты, причем прямо пропорционально.

Рассмотренный путь вывода (7.46), опирающийся на второй замечательный предел, принадлежит одному из пионеров теоретической космонавтики Ю.В. Кондратюку (1897–1941). В работах К.Э. Циолковского (1857–1935) соотношение (7.46) получено с использованием мощного аппарата дифференциального и интегрального исчисления. #

С экспоненциальной функцией тесно связаны *гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{и} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Они являются *элементарными функциями*, поскольку получены из *основной элементарной функции* e^x путем суперпозиции (e^{-x}) и алгебраических операций. Отметим, что $\operatorname{ch} x$ — четная, а $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ — нечетные функции (рис. 7.15). Аналогом известной формулы $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ для гиперболических функций является формула

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7.47)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x, \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Как и *тригонометрические функции*, каждая из гиперболических имеет обратную функцию.

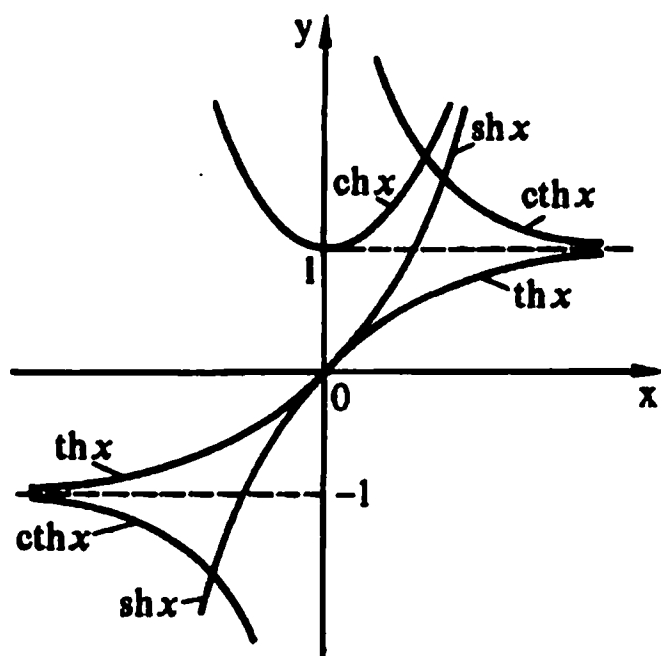


Рис. 7.15

Вопросы и задачи

7.1. Записать в символической форме определения для случаев:

- а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$;
 г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
 ж) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$; з) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$; и) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$.

Привести пример функции $f(x)$ для каждого из случаев.

7.2. Привести пример функции, не имеющей предела при $x \rightarrow +\infty$, но имеющей предел при $x \rightarrow -\infty$.

7.3. Показать, что существует $\delta > 0$, такое, что для любых x , удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, справедливо:

а) $|x^2 - 1| < 1$; б) $|x^2 - 1| < 0,01$; в) $|x^2 - 1| < 0,001$.

7.4. Используя определение 7.9 предела по Гейне, проверить, существуют ли пределы функции $\cos x$ при $x \rightarrow \infty$ и функции

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1), \\ x^2 - 1 & (x > 1) \end{cases}$$

при $x \rightarrow 1$.

7.5. Показать, что $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ и $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

7.6. Найти

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(2+x)}{(x+3)(x+4)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x^3 - 8}}{\sqrt{x} - 4}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x + 2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^m - a^m}{x}$, $m \in \mathbb{N}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+a)} - x - a}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}}$; з) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x}}$, $m, n \in \mathbb{N}$;

и) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$; к) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+1)(x+2)} - x)$.

7.7. Найти значения $f(a+0)$, $f(a-0)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (если они существуют) для функций:

а) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$, $a = 2$; б) $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$, $a = 1$;

в) $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$, $a = 0$; г) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $a = 1$;

д) $f(x) = x + [x^2]$, $a = 1$; е) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, $a = n \in \mathbb{N}$.

Для каких функций прямая $x = a$ является асимптотой их графика?

7.8. Изучить пределы многочлена (3.19) и рациональной функции (3.20) при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow \infty$.

7.9. Пусть $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x))$.

7.10. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(f(x))}{f(x)},$$

если $f(x)/x \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$.

7.11. Найти a и b из условий:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0;$

б) $\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b \right) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

7.12. Доказать, исходя из определения предела по Коши, что:

а) $\lim_{x \rightarrow -0} 2^x = 1 - 0$ и $\lim_{x \rightarrow +0} 2^x = 1 + 0;$

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 + 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 - 0$

при $f(x) = 2x/(1+x)$. Является ли прямая $y = 2$ асимптотой графика функции $f(x)$?

7.13. Доказать, что если $f(x)$ определена в промежутке $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b) , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)),$$

а если к тому же существует конечный или бесконечный

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = q,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{q}{n+1}.$$

8. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Гл. 6 и 7 посвящены одному из основных понятий математического анализа — *пределу*. И в случае *числовой последовательности*, и в случае *действительной функции действительного переменного* исследовано неограниченное приближение к некоторому постоянному значению переменной величины, зависящей от другой переменной при определенном ее изменении.

В этой главе попытаемся обобщить понятие предела для *отображений произвольных метрических пространств*, причем обобщение коснется и способа стремления независимого переменного к заданному значению.

8.1. Понятие предела отображения

Пусть X и Y — метрические пространства с заданными на них метриками ρ и d соответственно, а $A \subseteq X$ — некоторое подмножество в X с той же метрикой ρ , имеющее $a \in X$ своей предельной точкой. Подчеркнем, что в силу определения 5.9 эта предельная для A точка может как принадлежать, так и не принадлежать подмножеству A . Будем рассматривать *проколотую окрестность* $\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$ данной точки. Пусть область определения отображения $f: A \rightarrow Y$ включает множество A . Отметим, что для точки a это отображение может и не быть определено.

Определение 8.1. Точку $b \in Y$ называют *пределом отображения* $f: A \rightarrow Y$ в точке a по множеству A и записывают $b = \lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x)$ или $f(x) \rightarrow b$ при $x \xrightarrow{A} a$, если, какова бы ни была окрестность $V(b)$ точки b , существует такая

проколота окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a в X , что ее образ для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A$ принадлежит $V(b)$, т.е.

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) :\Leftrightarrow \forall V(b) \subset Y \exists \overset{\circ}{U}(a) : f(\overset{\circ}{U}(a) \cap A) \subset V(b). \quad (8.1)$$

При выполнении (8.1) говорят также, что функция $f(x)$ стремится к b при стремлении x по множеству A к точке a . Определение 8.1 является достаточно общим. В зависимости от того, какими множествами являются X , Y , $A \subseteq X$ и какова точка $a \in X$, можно получить различные конкретизации этого определения.

Напомним (см. 5.2), что любая окрестность точки включает ε -окрестность этой точки и всякая ε -окрестность является окрестностью. Поэтому, заменяя в (8.1) произвольную окрестность $V(b)$ точки $b \in Y$ на ее ε -окрестность

$$V(b, \varepsilon) = \{y \in Y : d(y, b) < \varepsilon\}, \quad (8.2)$$

а проколотую окрестность точки $a \in X$ — на ее проколотую δ -окрестность

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \in X : 0 < \rho(x, a) < \delta\}, \quad (8.3)$$

приходим к следующей символической записи определения предела отображения, эквивалентного определению 8.1:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad (0 < \rho(x, a) < \delta) \wedge (x \in A) \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon. \quad (8.4)$$

При $Y \subseteq \mathbb{R}$ из (8.1) следует символическая запись определения предела отображения $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (предела действительной функции):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(a) : \quad (x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon). \quad (8.5)$$

Если в (8.5) $b = 0$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно малой при стремлении x по множеству A к точке $a \in X$* и записывают

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{U}(a) : \quad (8.6)$$

$$(x \in \mathring{U}(a) \cap A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon).$$

При $Y \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ можно говорить о бесконечных пределах отображения, если точка b является одной из *бесконечных точек* $(+\infty$ или $-\infty)$ *расширенной числовой прямой \mathbb{R}* или их объединением (∞) . В этом случае окрестность каждой из перечисленных точек при выборе произвольного $M > 0$ примет вид

$$V(+\infty) = \{y \in Y : y > M\} = (M, +\infty),$$

$$V(-\infty) = \{y \in Y : y < -M\} = (-\infty, -M),$$

$$V(\infty) = \{y \in Y : |y| > M\} = (-\infty, -M) \cup (M, +\infty).$$

Тогда из (8.1) следуют три довольно похожих между собой записи в символической форме определений *бесконечных пределов функции*:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty : \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \mathring{U}(a) : \quad (8.7)$$

$$(x \in \mathring{U}(a) \cap A \Rightarrow f(x) > M),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty : \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \mathring{U}(a) : \quad (8.8)$$

$$(x \in \mathring{U}(a) \cap A \Rightarrow f(x) < -M),$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty : \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \mathring{U}(a) : \quad (8.9)$$

$$(x \in \mathring{U}(a) \cap A \Rightarrow |f(x)| > M).$$

Пример 8.1. Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

если отображение f в точках множества A принимает одно и то же значение c . В самом деле, какой бы ни была окрестность $V(c)$ точки c , $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A$ $f(x) = c$, так как $x \in A$. Поэтому $f(\overset{\circ}{U}(a) \cap A) \equiv c \in V(c)$, что соответствует определению 8.1.

Убедимся, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a,$$

если отображение f тождественно, т.е. $f(x) = x \quad \forall x \in A$. В этом случае для любой окрестности $V(a)$ при выборе $\overset{\circ}{U}(a) = V(a) \setminus \{a\}$ для тождественного отображения получим

$$f(\overset{\circ}{U}(a) \cap A) = \overset{\circ}{U}(a) \cap A = (V(a) \setminus \{a\}) \cap A \subset V(a),$$

что отвечает (8.1). В частности, когда $A = \mathbb{R}$ и a соответствует бесконечной точке $+\infty$ расширенной числовой прямой, имеем: $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Действительно, при произвольном $M > 0$ в качестве проколотой окрестности бесконечной точки $+\infty$ достаточно выбрать множество $U(+\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > M\}$, чтобы получить $f(x) > M$ и удовлетворить условию (8.7). #

Если в определении 8.1 $X = Y = \mathbb{R}$ и подмножество $A = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$, то приходим к понятию *правостороннего предела действительной функции действительного переменного* в точке a , обозначенного в 7.2 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$. Если же $X = Y = \mathbb{R}$ и $A = \{x \in \mathbb{R}: x < a\}$, то приходим к понятию *левостороннего предела функции* $f(x)$ в точке a , обозначаемого $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$. Отметим, что множество A может совпадать со всем множеством X . При $X = Y = \mathbb{R}$ этот случай в определении 8.1 соответствует понятию *двустороннего предела действительной функции действительного переменного*, причем (если нет угрозы путаницы) вместо $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ пишут просто $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Конечно, говоря о $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, можно рассматривать всевозможные мыслимые подмножества A , но не всегда это приводит

к содержательным нетривиальным результатам. Так, если функцию Дирихле рассматривать на подмножестве $Q \subset \mathbb{R}$ рациональных чисел, то получим просто постоянную функцию, предел которой установлен в примере 8.1.

При $A = N \subset X = \overline{\mathbb{R}}$ и $a = +\infty$ определение 8.1 приведет к понятию предела последовательности точек произвольного метрического пространства Y . В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 8.2. Точку $b \in Y$ называют *пределом последовательности* $\{y_n\}$ точек y_n метрического пространства Y , если, какова бы ни была окрестность $V(b) \subset Y$ точки b , существует натуральное число N , такое, что начиная с номера $N + 1$ все точки данной последовательности попадают в эту окрестность, т.е.

$$\lim\{y_n\} = b : \Leftrightarrow \forall V(b) \exists N \in \mathbb{N}: \\ (n > N \Rightarrow y_n \in V(b)). \quad (8.10)$$

При выполнении (8.10) говорят также, что $\{y_n\}$ стремится к точке b . Используя в (8.10) вместо произвольной окрестности точки b ее произвольную ε -окрестность, будем иметь

$$\lim\{y_n\} = b : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \\ (n > N \Rightarrow d(y_n, b) < \varepsilon). \quad (8.11)$$

Сравнивая (8.11) с (6.28) и определением 6.5, заключаем, что последовательность $\{y_n\}$ точек y_n метрического пространства стремится к точке b , если числовая последовательность $\{d(y_n, b)\}$ расстояний $d(y_n, b) \in \mathbb{R}$ бесконечно мала, т.е.

$$\lim\{y_n\} = b \Leftrightarrow \lim\{d(y_n, b)\} = 0.$$

Иначе говоря, исследование поведения последовательностей точек произвольного метрического пространства опирается на исследование сходимости числовых последовательностей.

Более того, и предел отображения произвольных метрических пространств тесно связан с пределом последовательностей. Эту связь устанавливает следующая теорема.

Теорема 8.1. Отображение $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ имеет точку $b \in Y$ своим пределом при стремлении x по множеству A к точке a тогда и только тогда, когда при отображении f образ любой стремящейся к a последовательности точек из A является последовательностью точек из Y , стремящейся к b , т.е.

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \left(\lim_{x_n \rightarrow a} \rho(x_n, a) = 0 \Rightarrow \lim_{x_n \rightarrow a} d(f(x_n), b) = 0 \right).$$

◀ Предположим, что точка $b \in Y$ удовлетворяет определению 8.1 предела отображения и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность точек x_n из A , стремящаяся к точке $a \in X$. Тогда, согласно (8.1), какова бы ни была окрестность $V(b) \subset Y$ точки b , существует проколота окрестность $\overset{\circ}{U}(a) \subset X$ точки a , такая, что $f(\overset{\circ}{U}(a) \cap A) \subset V(b)$. По определению 8.2, в $\overset{\circ}{U}(a) \cap A$ должны лежать начиная с некоторого номера $N+1$ все точки стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$, т.е. в силу (8.10)

$$\exists N \in \mathbb{N}: x_n \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A \quad \forall n > N.$$

Тогда начиная с того же номера все точки $f(x_n) \in Y$ последовательности $\{f(x_n)\}$ лежат в $V(b)$, что, согласно определению 8.2, означает, что эта последовательность стремится к b .

Чтобы доказать достаточность условия теоремы, предположим, что для любой стремящейся к a последовательности $\{x_n\}$ точек x_n из A последовательность $\{f(x_n)\}$ точек $f(x_n)$ из Y стремится к b . Если бы $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$, то это означало бы существование такого числа $\varepsilon > 0$, что при любом выборе $\delta > 0$ имеется точка $x \in A$, удовлетворяющая условиям $\rho(x, a) < \delta$

и $d(f(x), b) \geq \varepsilon$. При сколь угодно малом $\delta > 0$ можно указать натуральное число N , такое, что $1/N < \delta$. Тогда для каждого номера $n > N$ найдется хотя бы одна точка из A , которую обозначим x_n , такая, что $\rho(x_n, a) < 1/n < 1/N < \delta$, а $d(f(x_n), b) \geq \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$, составленная из таких точек $x_n \in A$, в силу (8.11) стремится к a , тогда как $\{f(x_n)\}$ не стремится к b , а это противоречит исходному предположению. Полученное противоречие доказывает достаточность условия теоремы. ►

Эта теорема позволяет сформулировать определение, эквивалентное определению 8.1.

Определение 8.3. Точку $b \in Y$ называют *пределом отображения* $f: A \rightarrow Y$ в точке a по множеству A , если при отображении f образ любой стремящейся к a последовательности точек из A является последовательностью точек из Y , стремящейся к b .

Символические формы записи этого определения и теоремы 8.1 совпадают.

Пример 8.2. Пусть $X = \bar{\mathbb{R}}$, $A = \mathbb{R}$, $a = +\infty$ и в отображении $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$$

не существует. Возьмем последовательность $\{x_n\} = \{2n\pi\}$, которая стремится к $+\infty$. Тогда $\cos x_n = \cos 2n\pi \equiv 1$, и в силу (6.9) $\lim \{\cos x_n\} = 1$. Если же взять последовательность $\{x_n\} = \{(2n+1)\pi/2\}$, также стремящуюся к $+\infty$, то ее образ сходится к нулю. Это противоречит определению 8.3 предела отображения, т.е. указанный выше предел не существует. Рассмотрение стремящихся к ∞ последовательностей $\{2n(-1)^n\pi\}$ и $\{(2n+1)(-1)^n\pi/2\}$ приводит к тому же выводу. Отметим, что если обозначить

$$A = \{x \in \mathbb{R}: x = 2n(-1)^n\pi, n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}: x = (2n+1)(-1)^n\pi/2, n \in \mathbb{N}\},$$

то правомерна запись

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x = 0. \quad \#$$

Сопоставлением определений 8.1 и 5.13 может быть доказана следующая теорема.

Теорема 8.2. Отображение $f: X \rightarrow Y$ будет непрерывным в точке $a \in X$ в том и только том случае, когда предел отображения при стремлении x по множеству X к точке a совпадает со значением $f(a)$, т.е. когда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (8.12)$$

◀ Пусть отображение f непрерывно в точке $a \in X$. Тогда, по определению 5.13 непрерывного отображения, какова бы ни была окрестность $V(b)$ точки $b = f(a) \in Y$, существует такая окрестность $U(a)$ точки $a \in A$, что $f(U(a)) \subset V(b)$, а стало быть, существует и проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такая, что $f(\mathring{U}(a)) \subset V(b)$. Согласно определению 8.1 это означает, что справедливо (8.12).

Обратно, пусть выполнено (8.12). Тогда в силу определения 8.1 для любой окрестности $V(b)$ точки $b = f(a)$ существует проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такая, что $f(\mathring{U}(a)) \subset V(b)$. Рассмотрим окрестность $U(a) = \mathring{U}(a) \cup \{a\}$. Поскольку $f(a) \in V(b)$, согласно свойствам отображения множеств (см. 2.1), имеем

$$f(U(a)) = f(\mathring{U}(a)) \cup f(a) \subset V(b) \cup b = V(b),$$

т.е. отображение f по определению 5.13 непрерывно в точке $a \in X$. ►

С учетом теоремы 8.2 можно сформулировать определение, эквивалентное определению 5.13.

Определение 8.4. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называют **непрерывным в точке** $a \in X$, если справедливо (8.12).

Учитывая теоремы 8.1 и 8.2, получаем следующее утверждение.

Утверждение 8.1. Для непрерывности отображения $f: X \rightarrow Y$ в предельной точке $a \in X$ необходимо и достаточно, чтобы образ при отображении f любой стремящейся к a последовательности точек из X был последовательностью точек из Y , сходящейся к точке $f(a)$.

8.2. Некоторые свойства предела отображения

Пусть X и Y , так же как и в 8.1, — метрические пространства, $A \subseteq X$ и $a \in X$ — предельная точка множества A .

Теорема 8.3. Если при стремлении x по множеству A к точке a отображение $f: X \rightarrow Y$ имеет предел, то он единственный.

◀ Предположим, что при $x \xrightarrow{A} a$ отображение f имеет два предела b_1 и b_2 , причем $b_1 \neq b_2$. Тогда при выборе непересекающихся окрестностей $V(b_1)$ и $V(b_2)$ этих точек ($V(b_1) \cap V(b_2) = \emptyset$), по определению 8.1, у точки a существует проколота окрестность $\mathring{U}(a)$, такая, что и $f(\mathring{U}(a) \cap A) \subset V(b_1)$, и $f(\mathring{U}(a) \cap A) \subset V(b_2)$, а это невозможно в силу определения 2.1 отображения. ►

Теорема 8.4 (о пределе композиции). Если существуют пределы

$$\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{y \xrightarrow{f(A)} b} g(y) = c$$

отображений $f: A \subseteq X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, причем $f(x) \neq b$ при $x \xrightarrow{A} a$, где X , Y и Z — метрические пространства, a и b —

предельные точки соответственно для $A \subseteq X$ и $f(A) \subseteq Y$, то существует при $x \xrightarrow{A} a$ и предел композиции (сложной функции) $g \circ f(x) = g(f(x))$, и

$$\lim_{x \xrightarrow{A} a} g(f(x)) = c.$$

◀ Выберем произвольную окрестность $W(c)$ точки c . Тогда в силу определения 8.1 предела отображения всегда можно найти такую проколотую окрестность $\mathring{V}(b)$ точки b , что $g(\mathring{V}(b) \cap f(A)) \subset W(c)$. В свою очередь, по тому же определению предела, существует проколотая окрестность $\mathring{U}_1(a)$ точки a , такая, что $f(\mathring{U}_1(a) \cap A) \subset \mathring{V}(b) \cap f(A)$. По условию теоремы, существует также проколотая окрестность $\mathring{U}_2(a)$ точки a , такая, что $f(x) \neq b \quad \forall x \in \mathring{U}_2(a)$. Таким образом,

$$\left(f(\mathring{U}(a) \cap A) \subset \mathring{V}(b) \cap f(A) \right) \wedge \left(f(x) \neq b \quad \forall x \in \mathring{U}(a) \cap A \right),$$

где $\mathring{U}(a) = \mathring{U}_1(a) \cap \mathring{U}_2(a)$. Следовательно, существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , что в силу свойств отображений множеств (см. 2.1)

$$g\left(f(\mathring{U}(a) \cap A)\right) \subset g\left(\mathring{V}(b) \cap f(A)\right) \subset W(c),$$

а это с учетом (8.1) доказывает теорему. ►

8.3. Пределы действительных функций

Пусть X — метрическое пространство и $a \in X$ — предельная точка множества $A \subseteq X$. Будем рассматривать функции $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, принимающие значения в пространстве \mathbb{R} действительных чисел. Для таких функций можно ввести

арифметические операции. Если на множестве A заданы две функции $f(x)$ и $g(x)$ со значениями в \mathbb{R} , то запись $f(x) \leq g(x)$ означает, что неравенство справедливо $\forall x \in A$. На множестве A определена сумма $f(x) + g(x)$ как результат сложения соответствующих значений функций. Аналогично определяют вычитание, умножение и деление функций (последнее для рассматриваемой точки $x \in A$ возможно, если делитель в этой точке отличен от нуля).

Функцию $f(x)$ называют:

1) **неотрицательной (положительной) при $x \rightarrow_A a$** , если существует проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такая, что

$$f(x) \geq 0 \quad (f(x) > 0) \quad \forall x \in \mathring{U}(a) \cap A \quad (8.13)$$

(аналогично определяют **неположительную функцию** ($f(x) \leq 0$), **отрицательную** ($f(x) < 0$) и **не равную нулю** ($f(x) \neq 0$));

2) **ограниченной (сверху, снизу) при $x \rightarrow_A a$** , если существуют постоянная $c \in \mathbb{R}$ и проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такие, что

$$|f(x)| \leq c, \quad c > 0 \quad (f(x) \leq c, f(x) \geq c) \quad \forall x \in \mathring{U}(a) \cap A; \quad (8.14)$$

3) **бесконечно малой при $x \rightarrow_A a$** (см. (8.6)), если $\lim_{x \rightarrow_A a} f(x) = 0$;

4) **бесконечно большой при $x \rightarrow_A a$** (см. (8.7)–(8.9)), если $\lim_{x \rightarrow_A a} f(x) = \infty$ ($= +\infty$ или $-\infty$).

Из примера 8.1 следует, что предел при $x \rightarrow_A a$ функции $f(x)$, сохраняющей при $x \rightarrow_A a$ постоянное значение $c = \text{const}$, равен c .

Для функции со значениями в \mathbb{R} приведем основные теоремы о пределах. Доказать эти теоремы читатель сможет самостоятельно, опираясь на приведенные выше определение и свойства **абсолютного значения действительного числа**.

Теорема 8.5. Функция $f(x)$, имеющая при $x \xrightarrow{A} a$ конечный предел, ограничена при $x \xrightarrow{A} a$.

Теорема 8.6 (о связи функции, ее предела и бесконечно малой). Функция $f(x)$ имеет конечный предел $b \in \mathbb{R}$ при $x \xrightarrow{A} a$ тогда и только тогда, когда функция равна сумме числа b и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x \xrightarrow{A} a$.

Теорема 8.7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены при $x \xrightarrow{A} a$, то их сумма $f(x) + g(x)$ и произведение $f(x)g(x)$ также ограничены при $x \xrightarrow{A} a$.

Теорема 8.8. Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \xrightarrow{A} a$, то $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \xrightarrow{A} a$.

Теорема 8.9. Если функция $f(x)$ ограничена при $x \xrightarrow{A} a$ и $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \xrightarrow{A} a$, то произведение $f(x)\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \xrightarrow{A} a$.

Следствие 8.1. Произведение двух бесконечно малых функций при $x \xrightarrow{A} a$ есть бесконечно малая функция при $x \xrightarrow{A} a$.

На основании этих теорем докажем теорему о пределе суммы, произведения и частного. Такой же подход к доказательству можно было бы осуществить, рассматривая свойства предела действительной функции действительного переменного (см. 7.4 и 7.5).

Теорема 8.10 (о пределе суммы, произведения и частного). Справедливы утверждения:

$$\begin{aligned} & (\exists \lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}) \wedge (\exists \lim_{x \xrightarrow{A} a} g(x) = b_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \exists \lim_{x \xrightarrow{A} a} (f(x) + g(x)) = b_1 + b_2; \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x)g(x) = b_1 b_2; \quad (8.16)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \xrightarrow{A} a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1}{b_2} \quad (b_2 \neq 0). \quad (8.17)$$

◀ По теореме 8.6 $f(x) = b_1 + \alpha(x)$ и $g(x) = b_2 + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \xrightarrow{A} a$. Тогда $f(x) + g(x) = b_1 + b_2 + \alpha(x) + \beta(x)$. Из теоремы 8.9 следует, что $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \xrightarrow{A} a$. С учетом теоремы 8.6 это означает справедливость (8.15).

Для доказательства (8.16) запишем

$$f(x)g(x) = b_1b_2 + \alpha(x)b_2 + \beta(x)b_1 + \alpha(x)\beta(x).$$

Сумма последних трех слагаемых в правой части этого равенства в силу теорем 8.8, 8.9 и следствия 8.1 является бесконечно малой при $x \xrightarrow{A} a$, что, согласно теореме 8.6, означает справедливость (8.16).

Из (8.5) следует, что существует проколота окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , такая, что $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A$ $|g(x) - b_2| < |b_2|/2$, или $b_2 - |b_2|/2 < g(x) < b_2 + |b_2|/2$, т.е. $|g(x)| > |b_2|/2$ и $|1/g(x)| < 2/|b_2|$. Таким образом, функция $1/g(x)$ ограничена при $x \xrightarrow{A} a$.

Далее имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \alpha(x)}{b_2 + \beta(x)} = \frac{b_1}{b_2} + \left(\frac{b_1 + \alpha(x)}{b_2 + \beta(x)} - \frac{b_1}{b_2} \right) = \frac{b_1}{b_2} + \frac{\alpha(x)b_2 - \beta(x)b_1}{b_2g(x)}.$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства в силу теорем 8.8 и 8.9 является бесконечно малой при $x \xrightarrow{A} a$, что, согласно теореме 8.6, означает справедливость (8.17). ▶

Ясно, что (8.15) и (8.16) можно распространить на произвольное конечное число слагаемых и сомножителей.

Следствие 8.2. При вычислении предела функции постоянный сомножитель можно выносить за символ предела.

◀ Из (8.16) и теоремы 8.5 при $g(x) = c = \text{const} \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A$ следует, что $\lim_{x \xrightarrow{A} a} cf(x) = c \lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x)$. ▶

Объединение этого следствия с (8.15) дает правило вычисления предела *линейной комбинации* функций: если $\forall k = \overline{1, m}$ $\lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k$ и $\mathbb{R} \ni c_k = \text{const}$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^m c_k f_k(x) = \sum_{k=1}^m c_k \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = \sum_{k=1}^m c_k b_k. \quad (8.18)$$

Учитывая определения предела, бесконечно малой и бесконечно большой функций, нетрудно доказать следующие теоремы.

Теорема 8.11 (о связи между бесконечно малой и бесконечно большой функциями). Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow a$ и $\alpha(x) \neq 0$ при $x \rightarrow a$, то $f(x) = 1/\alpha(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow a$, и обратно, если $f(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow a$, то $\alpha(x) = 1/f(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow a$.

Теорема 8.12 (о сохранении функцией знака своего предела). Если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ имеет конечный ненулевой предел, то при $x \rightarrow a$ эта функция сохраняет знак своего предела.

Очевидно, что $f(x) \leq g(x)$ ($f(x) < g(x)$) при $x \rightarrow a$, если разность $g(x) - f(x)$ неотрицательна (положительна) при $x \rightarrow a$ (см. (8.13)).

Следствие 8.3. Если при $x \rightarrow a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы соответственно b_1 и b_2 , причем $b_1 < b_2$, то $f(x) < g(x)$ при $x \rightarrow a$.

Теорема 8.13 (о сохранении пределом знака функции). Если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ имеет предел b и неотрицательна (неположительна), то этот предел также неотрицателен (неположителен).

Отметим, что если в теореме 8.13 при $x \xrightarrow{A} a$ $f(x) > 0$ и существует $\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = b$, то все равно можно лишь утверждать, что $b \geq 0$, а не $b > 0$.

Теорема 8.14 (о переходе к пределу в неравенстве). Если при $x \xrightarrow{A} a$ $f(x) \leq g(x)$ и существуют пределы этих функций, то неравенство сохраняется при переходе к пределам, т.е.

$$\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) \leq \lim_{x \xrightarrow{A} a} g(x).$$

8.4. Признаки существования предела действительной функции

Теорема 8.15. Если при $x \xrightarrow{A} a$ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и функции $f(x)$ и $h(x)$ имеют одинаковый предел, то функция $g(x)$ имеет тот же предел при $x \xrightarrow{A} a$, т.е.

$$\left(\exists \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \cap A \ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \right) \wedge \\ \wedge \left(\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{A} a} h(x) = b \right) \Rightarrow \lim_{x \xrightarrow{A} a} g(x) = b.$$

◀ По условию теоремы с учетом (8.5) существуют для любого $\varepsilon > 0$ проколотые окрестности $\mathring{U}_1(a)$ и $\mathring{U}_2(a)$ точки a , такие, что

$$|f(x) - b| < \varepsilon \ \forall x \in \mathring{U}_1(a) \cap A \quad \text{и} \quad |h(x) - b| < \varepsilon \ \forall x \in \mathring{U}_2(a) \cap A.$$

Если $\mathring{U}(a) = \mathring{U}_1(a) \cap \mathring{U}_2(a)$ и $x \in \mathring{U}(a) \cap A$, то $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ и $b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon$, или

$$b - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < b + \varepsilon,$$

т.е. $|g(x) - b| < \varepsilon$, что в силу (8.5) доказывает утверждение теоремы. ▶

Определение 8.5. Функцию $f(x)$ называют **неубывающей** (**невозрастающей**) **при** $x \xrightarrow{A} a$, если для любых двух проколотых окрестностей $\mathring{U}(a)$ и $\mathring{U}_1(a)$ точки a из условия, что $\mathring{U}_1(a) \subset \mathring{U}(a)$, следует неравенство

$$\sup\{f(x): x \in (\mathring{U}(a) \setminus \mathring{U}_1(a)) \cap A\} \leq \inf\{f(x): x \in \mathring{U}_1(a) \cap A\} \\ \left(\inf\{f(x): x \in (\mathring{U}(a) \setminus \mathring{U}_1(a)) \cap A\} \geq \sup\{f(x): x \in \mathring{U}_1(a) \cap A\} \right).$$

Пример 8.3. Функции $1/x^2$ и $\operatorname{arctg}(1/x^2)$ $\forall x \in A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются неубывающими при $x \xrightarrow{A} 0$.

Теорема 8.16. Если при $x \xrightarrow{A} a$ функция $f(x)$ не убывает (или не возрастает) и ограничена сверху (соответственно снизу) при $x \xrightarrow{A} a$, то существует

$$\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = \sup\{f(x): x \in \mathring{U}(a) \cap A\} \\ \left(\lim_{x \xrightarrow{A} a} f(x) = \inf\{f(x): x \in \mathring{U}(a) \cap A\} \right),$$

и он является конечным.

◀ Пусть $f(x)$ ограничена сверху. Тогда из (8.14) следует, что

$$\exists c \in \mathbb{R}: f(x) \leq c \quad \forall x \in \mathring{U}(a) \cap A.$$

Обозначим $b = \sup\{f(x): x \in \mathring{U}(a) \cap A\}$ и по свойству *точной верхней грани* (см. 2.7) для произвольного положительного числа ε найдем точку $x^* \in \mathring{U}(a) \cap A$, для которой $b - \varepsilon < f(x) \leq b$. Так как $x^* \neq a$, то $\rho(x^*, a) = \delta > 0$ и $\exists \mathring{U}_1(a) = \{x \in A: 0 < \rho(x, a) < \delta\}: x^* \notin \mathring{U}_1(a)$. Поскольку $x^* \in \mathring{U}(a)$, $\mathring{U}(a) = \{x \in A: 0 < \rho(x, a) < \delta_1\}$, где $\delta_1 > \delta$, то $\mathring{U}_1(a) \subset \mathring{U}(a)$.

Для неубывающей функции в силу определений 8.5 и точной верхней грани

$$\begin{aligned} & \inf \{ f(x): x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \cap A \} \geq \\ & \geq \sup \{ f(x): x \in (\overset{\circ}{U}(a) \setminus \overset{\circ}{U}_1(a)) \cap A \} \geq f(x^*) > b - \varepsilon. \end{aligned}$$

В то же время из $\overset{\circ}{U}_1(a) \subset \overset{\circ}{U}(a)$ имеем

$$\sup \{ f(x): x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \cap A \} \leq \sup \{ f(x): x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A \} = b.$$

Итак, всюду на множестве $\overset{\circ}{U}(a) \cap A$ $b - \varepsilon < f(x) \leq b$, а это в силу (8.5) означает, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Если же функция $f(x)$ не возрастает при $x \rightarrow a$, то функция $-f(x)$ не убывает. Ограниченность снизу $f(x)$ при $x \rightarrow a$ обеспечивает ограниченность сверху $-f(x)$ при $x \rightarrow a$. Как мы только что доказали,

$$\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \sup \{ -f(x): x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A \}.$$

Поэтому

$$-\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\inf \{ f(x): x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A \},$$

т.е. утверждение теоремы верно и для невозрастающей функции. ►

Теорема 8.17. Если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ не убывает (или не возрастает) и не ограничена сверху (соответственно снизу), то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (соответственно $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

◀ Пусть функция $f(x)$ не убывает. Для произвольного положительного числа M в любой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$

точки a найдется точка x^* , такая, что для неограниченной сверху функции $f(x^*) > M$. Найдем такую проколотую окрестность $\mathring{U}_1(a)$ точки a , что $x^* \notin \mathring{U}_1(a) \subset \mathring{U}(a)$. Тогда с учетом определения 8.5

$$M \leq \sup \{ f(x) : x \in (\mathring{U}(a) \setminus \mathring{U}_1(a)) \cap A \} \leq \leq \inf \{ f(x) : x \in \mathring{U}_1(a) \cap A \}.$$

Следовательно, во всех точках множества $\mathring{U}_1(a) \cap A$ $f(x) > M$, что в силу (8.7) дает $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Ход доказательства для случая невозрастающей и неограниченной снизу при $x \rightarrow a$ функции аналогичен. ►

Из рассмотренных в примере 8.3 неубывающих при $x \rightarrow 0$ функций ($A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) первая является неограниченной, и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad (8.19)$$

а вторая — ограниченной, причем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (8.20)$$

Теорема 8.18 (критерий Коши существования предела функции). Функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow a$ конечный предел тогда и только тогда, когда при любом положительном ε существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такая, что абсолютное значение разности значений функции в любых двух точках из этой окрестности меньше ε , т.е.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathring{U}(a) :$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathring{U}(a) \cap A \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

◀ Примем сначала, что предел существует, и обозначим его b . Тогда в силу (8.5) при любом $\varepsilon > 0$ существует такая проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , что $|f(x) - b| < \varepsilon/2$ $\forall x \in \mathring{U}(a) \cap A$. Поэтому с учетом (1.4) $\forall x_1, x_2 \in \mathring{U}(a) \cap A$ имеем

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(f(x_1) - b) - (f(x_2) - b)| \leq \\ &\leq |f(x_1) - b| + |f(x_2) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Обратно, пусть существует проколота окрестность $\mathring{U}(a)$ точки a , такая, что при произвольном $\varepsilon > 0$ для нее верно (8.21). Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in A$ метрического пространства A , стремящуюся к точке a . Тогда, по определению 8.2, начиная с некоторого номера $N+1$ все элементы этой последовательности попадут в данную окрестность. Итак,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: (n > N) \wedge (m > N) \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{f(x_n)\}$, по определению 6.4, является фундаментальной и удовлетворяет условиям критерия Коши сходимости числовых последовательностей (см. утверждение 6.3).

Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к точке a , существует предел $\lim \{f(x_n)\}$, а это означает в силу теоремы 8.1, что существует при $x \xrightarrow{A} a$ предел функции $f(x)$. ►

Пример 8.4. Пусть действительная функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на множестве $A = [d, +\infty)$ и ограничена при $x \xrightarrow{A} +\infty$. Покажем, что $f(x)$ равномерно непрерывна на A . Из ограниченности и монотонности $f(x)$ в силу теоремы 8.16 следует существование при $x \xrightarrow{A} +\infty$ конечного предела. Это, в свою очередь, в силу критерия Коши (теорема 8.18)

означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overset{\circ}{U}(+\infty) : \forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}(+\infty) \cap A \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Проколотая окрестность *бесконечной точки* $+\infty$ *расширенной числовой прямой* совпадает с окрестностью этой точки, т.е. $\overset{\circ}{U}(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > E\} \quad \forall E \in \mathbb{R}$. Тогда для рассматриваемой функции имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists E \geq d : \forall x_1, x_2 > E \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Это неравенство справедливо, если при некотором произвольном $\delta > 0$ будет еще и $|x_1 - x_2| < \delta \quad \forall x_1, x_2 > E$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|x_1 - x_2| < \delta \quad \forall x_1, x_2 > E \geq d) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.22)$$

По определению 5.17, (8.22) означает, что $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x > E\} = (E, +\infty)$. При $E > d$ эта функция равномерно непрерывна на отрезке $[d, E]$ в силу ее непрерывности на этом отрезке (см. следствие 5.6), т.е. неравенство (8.22) справедливо и для любых $x_1, x_2 \in [d, E]$, а значит, и для любых $x_1, x_2 \geq d$. Таким образом, функция $f(x)$, по определению 5.17, равномерно непрерывна на множестве $\{x \in \mathbb{R} : x \geq d\} = [d, +\infty) = A$.

Дополнение 8.1. Полное метрическое пространство

Понятие *фундаментальной последовательности* можно распространить на произвольное метрическое пространство X с метрикой ρ .

Определение 8.6. Последовательность $\{x_n\}$ элементов $x_n \in X$ называют *фундаментальной*, если для любого положительного числа ε можно указать натуральное число N ,

такое, что расстояние между любыми двумя ее элементами с номерами, большими N , меньше ε , т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: (n > N) \wedge (m > N) \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Определение 8.7. Метрическое пространство называют **полным**, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится к точке этого же пространства.

По теореме 6.7, любая сходящаяся последовательность фундаментальна. Этот вывод нетрудно распространить на произвольное метрическое пространство, используя (8.11) и неравенство треугольника (см. определение 5.1). Однако обратное утверждение не всегда верно — не всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ при $x_n \in X$ сходится к точке данного метрического пространства X . Например, последовательность $\{x_n\}$ при $x_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ фундаментальна в метрическом пространстве $X = (0, 1]$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, но не сходится в этом пространстве. Она сходится к точке $a = 0$, но $a \notin X$. Эта последовательность сходится в $X_1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, а значит, и в \mathbb{R} . Помимо \mathbb{R} примерами полных метрических пространств являются отрезки $[a, b] \subset \mathbb{R}$, бесконечные полуинтервалы $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$ и их прямые (декартовы) произведения.

Дополнение 8.2. Принцип сжимающих отображений

Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ .

Определение 8.8. Отображение $f: X \rightarrow X$ называют **сжимающим**, если существует такая положительная постоянная $q < 1$, что для любой пары точек x и y из X имеет место неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leq q\rho(x, y). \quad (8.23)$$

Отсюда вытекает, что отображение f удовлетворяет условию Липшица (5.21) и, следовательно, равномерно непрерывно.

Определение 8.9. Точку a называют *неподвижной точкой отображения f* , если $f(a) = a$.

Теорема 8.19 (о неподвижной точке сжимающего отображения). Любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.

◀ Если неподвижная точка сжимающего отображения существует, то единственность ее очевидна. В самом деле, если a_1 и a_2 — две неподвижные точки, то, согласно (8.23) и определению 8.9, имеем

$$\rho(f(a_1), f(a_2)) = \rho(a_1, a_2) \leq q\rho(a_1, a_2),$$

т.е. $(1 - q)\rho(a_1, a_2) \leq 0$, что может быть только в случае, если $\rho(a_1, a_2) = 0$, а стало быть, в силу определения 5.1 метрики $a_1 = a_2$.

Для доказательства существования неподвижной точки применим *метод последовательных приближений*. Пусть x_0 — произвольная точка из X . Положив

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad \dots,$$

получим некоторую (бесконечную) *последовательность $\{x_n\}$ точек из X* . Докажем, что она *фундаментальна*. Поскольку f — сжимающее отображение, можно записать последовательность неравенств:

$$\begin{aligned} \rho(x_2, x_1) &\leq q\rho(x_1, x_0), \\ \rho(x_3, x_2) &\leq q\rho(x_2, x_1) \leq q^2\rho(x_1, x_0), \\ &\dots\dots\dots \\ \rho(x_{n+1}, x_n) &\leq q\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^n\rho(x_1, x_0), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Тогда с учетом неравенства треугольника и формулы (6.21) для суммы членов убывающей геометрической прогрессии

$$\begin{aligned}
 \rho(x_{n+m}, x_n) &\leq \rho(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \rho(x_{n+m-1}, x_n) \leq \\
 &\leq \rho(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \\
 &\quad + \rho(x_{n+m-2}, x_n) \leq \\
 &\leq \rho(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \dots + \\
 &\quad + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\
 &\leq (q^{n+m-1} + q^{n+m-2} + \dots + q^n) \rho(x_1, x_0) = \\
 &= q^n (1 + q + \dots + q^{m-1}) \rho(x_1, x_0) \leq \\
 &\leq q^n (1 + q + q^2 + \dots) \rho(x_1, x_0) = \frac{q^n}{1-q} \rho(x_1, x_0). \quad (8.24)
 \end{aligned}$$

Поскольку $\lim\{q^n\} = 0$ при $q < 1$ (см. пример 6.4), имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n > N,$$

что, по определению 8.6, означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Она сходится в силу полноты метрического пространства (см. определение 8.7) к некоторому пределу a . Так как отображение f непрерывно, последовательность $\{x_n\}$ при $x_n = f(x_{n-1})$ сходится к $f(a)$ (см. утверждение 8.1). В силу единственности предела получим $f(a) = a$, а это означает, по определению 8.8, что a — неподвижная точка отображения f . ►

Отметим, что приведенное доказательство этой теоремы не только позволяет установить существование неподвижной точки, но и является практическим методом ее вычисления. Действительно, так как расстояние $\rho(x, a)$ до фиксированной точки a есть непрерывная функция аргумента x (см. пример 5.7), для последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a , найдем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_{n+m}, x_n) = \rho(a, x_n).$$

Поскольку (8.24) справедливо $\forall m \in \mathbb{N}$, согласно теореме 8.14 о переходе к пределу в неравенстве имеем

$$\rho(a, x_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} \rho(x_1, x_0), \quad (8.25)$$

что позволяет получить оценку быстроты сходимости последовательности $\{x_n\}$ к a .

Применим теорему 8.19 к решению уравнения вида

$$f(x) = 0, \quad (8.26)$$

представив его в форме

$$x = g(x). \quad (8.27)$$

Это можно сделать, записав, например, при $c \neq 0$ $x = x + cf(x)$. Тогда поиск решения уравнения (8.26) будет сведен к отысканию неподвижной точки отображения $g: X \rightarrow X$. Параметр c выбирают из условия, чтобы отображение $g(x) = x + cf(x)$ было сжимающим для некоторого полного метрического пространства X , которое содержит искомый корень уравнения (8.26).

Пусть, например, $X \subset \mathbb{R}$ и найден отрезок $[a, b]$, на котором лежит только этот корень уравнения (8.26). Отрезок числовой прямой является полным метрическим пространством (см. Д.8.1). Чтобы итерационная последовательность $\{x_n\}$ при $x_n = g(x_{n-1})$ сходилась на отрезке $[a, b]$ к неподвижной точке отображения g , оно, согласно теореме 8.19, должно быть на этом отрезке сжимающим, т.е. при $0 < q < 1$

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq q|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]. \quad (8.28)$$

При этом в силу (8.25) справедлива оценка погрешности

$$|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} |g(x_0) - x_0|, \quad (8.29)$$

где $x_0 \in [a, b]$ — начальное приближение, а $x^* \in [a, b]$ — значение искомого корня уравнения (8.26).

Пример 8.5. Пусть в (8.26) $f(x) = e^x \sin x - 1$ и требуется найти наименьший положительный корень этого уравнения. Анализ $f(x)$ показывает, что такой корень следует искать на отрезке $[0, \pi/2]$.

Запишем $x = g(x) = x + c(e^x \sin x - 1)$ и выберем c так, чтобы

$$|x_1 + c(e^{x_1} \sin x_1 - 1) - x_2 - c(e^{x_2} \sin x_2 - 1)| \leq q|x_1 - x_2|.$$

Поскольку $\forall x_1, x_2 \in [0, \pi/2]$ имеем

$$|x_1 + c(e^{x_1} \sin x_1 - 1) - x_2 - c(e^{x_2} \sin x_2 - 1)| \leq |x_1 - x_2| + ce^{\pi/2},$$

достаточно выбрать c из условия

$$|x_1 - x_2| + ce^{\pi/2} \leq q|x_1 - x_2|, \quad \text{или} \quad c \leq \pi \frac{q-1}{2} e^{-\pi/2}.$$

Полагая, например, $q = 1/2$, получаем, что можно взять $c = -0,6$. Если за начальное приближение выбрать точку в середине отрезка, то

$$x_0 = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854 \quad \text{и} \quad x_1 = g(x_0) = x_0 - 0,6(e^{x_0} \sin x_0 - 1) \approx 0,4550.$$

Дальнейшие приближения для искомого корня x^* дают элементы итерационной последовательности, вычисляемые по формуле

$$x_{n+1} = x_n - 0,6(e^{x_n} \sin x_n - 1).$$

Погрешность $|x_N - x^*|$ не выше ε будет достигнута после N приближений, где N , согласно (8.29), удовлетворяет условию

$$\frac{q^N}{1-q} |g(x_0) - x_0| \leq \varepsilon.$$

В данном примере при $q = 1/2$ и $\varepsilon = 10^{-4}$ $N \geq 13$.

Вопросы и задачи

8.1. Доказать теорему 8.1 для отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ для случаев $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

8.2. Для отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Доказать, что в точке $x = 0$ существуют пределы функций $f(x^2)$, $f(x^3)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$. Справедливы ли обратные утверждения?

8.3. Существует ли предел функции $\cos(1/x)$, если x стремится к нулю по множеству $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

8.4. Привести примеры последовательностей $\{x_n\}$, таких, что последовательность $\{x_n \cos x_n\}$ стремится к 0, к $+\infty$, к $-\infty$.

8.5. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — не равная постоянной периодическая функция с периодом $T > 0$. Имеет ли она предел при стремлении аргумента к $+\infty$ или к $-\infty$?

8.6. Для отображения $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Доказать, что при $x \rightarrow 0$ к нулю стремятся функции $f(x) + f(2x)$, $f(x) + f(x^2)$, $f(x)f(2x)$, $f(x) + f^2(x)$. Справедливы ли обратные утверждения?

8.7. Для отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ в предельной для подмножества $A \subset X$ метрического пространства X точке a $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + 1/|f(x)|) = 0$. Найти в этой точке предел функции $f(x)$.

8.8. Для отображения $f: A \rightarrow (0, +\infty)$ в точке a , предельной для метрического пространства A , существует $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + 1/|f(x)|) = 2$. Найти в этой точке предел функции $f(x)$.

8.9. Найти пределы отображений $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при стремлении аргумента к нулю по множеству $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

если

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Существует ли в точке $x = 0$ предел композиции (сложной функции) $g(f(x))$? Какое условие теоремы 8.4 будет нарушено в этом случае?

8.10. Отображения $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ не имеют предела в точке a , предельной для метрического пространства A . Следует ли отсюда, что $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ также не имеют предела в точке a ?

8.11. Можно ли для вычисления $1/a$ при $a > 0$ использовать итерационную последовательность $\{x_n\}$ при $x_{n+1} = (2 - ax_n)x_n$? В каком интервале следует выбирать значение x_1 ?

8.12. Доказать что функция $f(x)$ из задачи 8.9 непрерывна лишь в точках $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8.13. Пусть

$$\forall \overset{\circ}{U}(a) \exists (\varepsilon > 0) \wedge (b \in \mathbb{R}): |f(x) - b| < \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \cap A,$$

где a — предельная для метрического пространства A точка, а $f(x)$ — определенная на A действительная функция со значениями в \mathbb{R} . Имеет ли эта функция предел при $x \xrightarrow{A} a$? Что можно сказать о поведении этой функции при $x \xrightarrow{A} a$, если $a \in A$ и $f(a) = b$?

8.14. Доказать, что если ограниченная монотонная функция непрерывна в конечном или бесконечном интервале, то она равномерно непрерывна в этом интервале.

9. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

Известно, что во многих наблюдаемых процессах и явлениях изменения происходят в основном постепенно, непрерывно. Например, поставили нагревать воду: время идет, температура воды повышается. Но как? Постепенно, без скачков, непрерывно, т.е. за малый промежуток времени температура изменяется мало. В этом примере, с точки зрения математика, температура воды есть функция времени, и эта функция такова, что при малом изменении аргумента (времени) мало изменяется функция (температура). Другой пример: пусть необходимо вычислить поточнее объем некоторого куба. И каждый, получивший такое задание, будет стремиться поточнее измерить длину ребра куба x , так как он интуитивно понимает, что, чем меньше погрешность измерения x , тем меньше будет погрешность вычисления объема куба x^3 . Если перейти от грубого измерительного инструмента к существенно более точному, то погрешность вычисления объема уменьшится резко, как бы скачком, а если улучшать точность измерения постепенно, то погрешность вычисления будет уменьшаться также постепенно.

В приведенных примерах просматривается свойство непрерывности указанных выше функций. И подобное столкновение с понятием непрерывности поджидает нас на каждом шагу. На практике наше представление о непрерывности изменения зависимой переменной величины обычно связано с масштабом, в котором мы фиксируем изменение аргумента.

В обыденной жизни мы считаем, что испарение капли воды, попавшей на раскаленную поверхность, происходит мгновенно, т.е. температура капли скачком достигает температуры кипения воды. Но при необходимости более детального описания процесса испарения можно увеличить масштаб времени (как говорят, использовать „лупу времени“), и тогда окажется, что температура капли растет непрерывно.

Очевидно, что установление на географической карте фиксированной границы экологически опасного региона на основе выборочных данных по ПДК (предельно допустимой концентрации) вредных веществ весьма условно, поскольку в привычном для нас масштабе расстояний от миллиметра до километра их концентрация изменяется непрерывно. Но в масштабе измерения расстояний порядка сотен и тысяч километров удобно описывать изменение концентрации как скачкообразное.

Изменение котировки ценных бумаг на бирже происходит в течение дня практически непрерывно, хотя фиксируют его ежедневно как скачкообразное изменение курса и анализируют с помощью таблиц и диаграмм, прибегая к построению непрерывных кривых на графиках в шкале недель и месяцев.

Импульсные процессы обычно описывают скачкообразным изменением переменных величин. Например, изменение по времени t силы тока I в цепи телеграфного ключа при передаче азбукой Морзе буквы „а“ („точка — тире“) схематически представлено на рис. 9.1,а. Вследствие наличия индуктивности в цепи при изменении силы тока возникает противодействующая внешней ЭДС самоиндукции, и нарастание силы тока с увеличенным на три порядка масштабом по оси t будет хотя и весьма быстрым, но непрерывным (рис. 9.1,б). Если длительность импульсов сравнима с временем нарастания силы тока, то это может повлиять на качество передачи сигналов, и результат учета непрерывного описания процесса будет существен. В противном случае можно ограничиться скачкообразной схематизацией процесса.

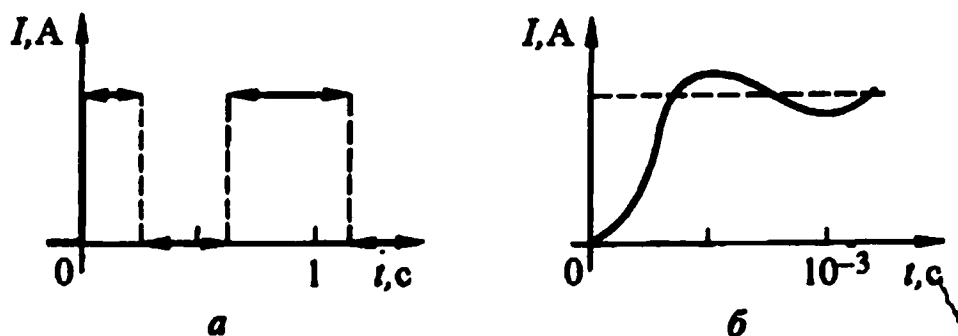


Рис. 9.1

На этих примерах видно, что одни и те же процессы могут быть описаны разными функциями с различным характером их поведения (обладающих свойством непрерывности или нет). Но чтобы предвидеть поведение каждой конкретной функции, интуитивных представлений о непрерывности недостаточно. Необходимо основательное изучение свойства непрерывности функций.

9.1. Непрерывность функции в точке

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, так что в этой точке функция имеет вполне определенное значение $f(a)$. При введении понятия предела функции в некоторой точке a (см. 7.1) было подчеркнуто, что эта точка может и не принадлежать области определения функции, а если и принадлежит, то значение $f(a)$ не играет никакой роли. При введении понятия непрерывности функции в точке ее значение в этой точке играет решающую роль.

Определение 9.1. Функцию $f(x)$ называют **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$ (или при значении $x = a$), если в этой точке существует конечный предел функции и он совпадает с ее значением $f(a)$, т.е. если

$$(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}) \wedge (\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)). \quad (9.1)$$

Раскрывая содержание этого определения на языке $\varepsilon - \delta$, можно сформулировать эквивалентное ему определение.

Определение 9.2. Функцию $f(x)$ называют **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$, если, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него найдется число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \quad (9.2)$$

Если сравнить условие (9.2) непрерывности функции в точке a с определением (7.3) предела функции в этой точке, то увидим, что различие состоит в замене в (7.3) значения b предела на значение $f(a)$ функции и в дополнении к проколотой δ -окрестности точки a самой этой точки. Из определения 9.2 следует, что свойство непрерывности функции в точке является локальным, поскольку зависит от поведения функции в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Непрерывная в точке $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности этой точки. Предположим, что графиком этой функции является „непрерывная линия“, т.е. что ее можно провести, не отрывая карандаша от бумаги (рис. 9.2). Линия

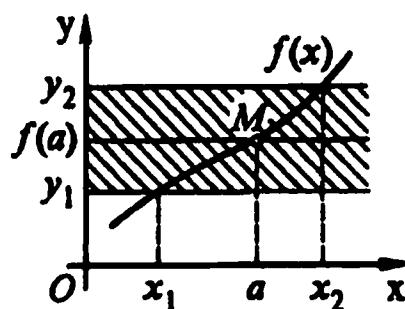


Рис. 9.2

должна проходить через точку M с координатами $(a, f(a))$. Рассмотрим полосу $f(a) - \varepsilon < y < f(a) + \varepsilon$ между горизонтальными прямыми $y_1 = f(a) - \varepsilon$ и $y_2 = f(a) + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ и часть линии графика, содержащую точку M и лежащую целиком внутри заштрихованной полосы. Проекцией этой части линии на ось абсцисс Ox будет некоторый интервал (x_1, x_2) , причем $x_1 < a < x_2$. Обозначим через δ меньшее из расстояний точки $a \in \mathbb{R}$ до концов этого интервала, т.е. $\delta = \min \{a - x_1, x_2 - a\}$. Если x таково, что $|x - a| < \delta$, то x лежит в интервале (x_1, x_2) , а значение $f(x)$ функции

лежит в интервале $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Так как проведенное рассуждение верно для произвольного $\varepsilon > 0$, указанное представление о непрерывности линии графика функции приводит к определению 9.2 непрерывности функции $f(x)$ в точке $a \in \mathbb{R}$.

Обратим внимание на существенную сторону определения 9.2 непрерывности функции на языке $\varepsilon - \delta$. Это определение говорит том, с какой точностью надо задавать значения аргумента функции для того, чтобы получить значения функции с заданной точностью. Именно эта практическая сущность определения 9.2 позволяет понять, почему так много внимания уделено изложению на языке $\varepsilon - \delta$ понятия предела и непрерывности и связанных с ними вопросов.

Определение 9.1 непрерывности функции можно сформулировать в иной форме. Изменение аргумента функции от значения $a \in \mathbb{R}$ к другому значению x можно представить как **приращение аргумента** (положительное или отрицательное) в точке $a \in \mathbb{R}$

$$\Delta x = x - a. \quad (9.3)$$

Тогда новое значение $f(a + \Delta x)$ функции $y = f(x)$ будет отличаться от прежнего значения $f(a)$ на величину

$$\Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a), \quad (9.4)$$

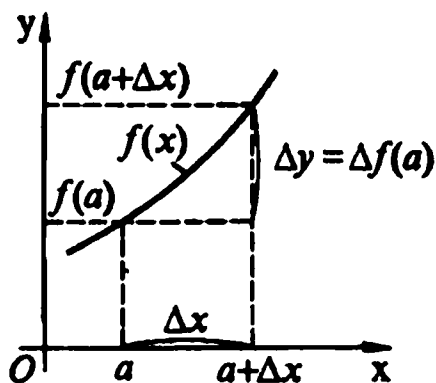


Рис. 9.3

называемую **приращением функции в точке $a \in \mathbb{R}$** . Геометрический смысл приращений ясен из рис. 9.3, на котором и Δx , и Δy положительны. В общем случае каждое из них может иметь любой знак.

Поскольку (9.1) означает, что $f(x) \rightarrow f(a)$ при $x \rightarrow a$, то с учетом (9.3) и (9.4) это равносильно

$\Delta f(a) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\Delta f(a)$ является функцией, бесконечно малой (б.м.) при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, определениям 9.1 и 9.2 эквивалентно следующее определение.

Определение 9.3. Функцию $f(x)$ называют **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$, если приращение функции в этой точке является функцией, б.м. при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0. \quad (9.5)$$

Пример 9.1. а. Функция $f(x) = c = \text{const}$ непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, так как $\forall a \in \mathbb{R} \quad \Delta f(a) = f(x) - f(a) \equiv 0$ и выполнено (9.5).

б. Функция $f(x) = x$ также непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, поскольку $\forall a \in \mathbb{R} \quad \Delta f(a) = f(x) - f(a) = x - a = \Delta x$ и выполнено (9.5).

в. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$. Имеем

$$|\Delta f(x)| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq |\Delta x|,$$

так как $|\cos(x + \Delta x/2)| \leq 1$, а $|\sin(\Delta x/2)| \leq |\Delta x|/2$ (см. (7.34)). Поэтому $\Delta f(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и выполнено условие определения 9.3 непрерывности данной функции в любой точке $a \in \mathbb{R}$. #

Используя теорему 7.2, сформулируем 'на языке последовательностей' еще одно определение, эквивалентное определениям 9.1 и 9.3.

Определение 9.4. Функцию $f(x)$ называют **непрерывной в точке** $a \in \mathbb{R}$, если для любой *сходящейся к a последовательности* $\{x_n\}$ значений аргумента $x \in \mathbb{R}$ соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $f(a)$, т.е. если

$$\forall \{x_n\} : \lim \{x_n\} = a \Rightarrow \exists \lim \{f(x_n)\} = f(a).$$

Пример 9.2. Опираясь на определение 9.4, убедимся в непрерывности *показательной функции* $f(x) = a^x$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x , и покажем, что $\{a^{x_n}\}$ сходится к a^x . Согласно определению 6.3 *предела последовательности*, надо показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $\forall n > N \quad |a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$. Стало быть, для элементов x_n последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, должно выполняться условие $a^x |a^{x_n-x} - 1| < \varepsilon$, или $1 - \varepsilon/a^x < a^{x_n-x} < 1 + \varepsilon/a^x$. Отсюда при $a \neq 1$ с учетом свойств *логарифмической функции* имеем

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 = \log_a \left(1 - \frac{\varepsilon}{a^x} \cdot \frac{|a-1|}{a-1} \right) < x_n - x < \\ < \log_a \left(1 + \frac{\varepsilon}{a^x} \cdot \frac{|a-1|}{a-1} \right) = \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

В силу сходимости $\{x_n\}$ к x начиная с некоторого номера $N+1$ будет обеспечено выполнение двойного неравенства в (9.6). Действительно, по определению 6.3 *предела последовательности*, для любого положительного числа, в частности для $\varepsilon_* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что $|x_n - x| < \varepsilon_*$ при $n > N$. Проведя в обратном порядке рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что при $n > N \quad |a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$, что означает сходимость $\{a^{x_n}\}$ к a^x и (согласно определению 9.4) непрерывность функции $f(x) = a^x$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

9.2. Свойства функций, непрерывных в точке

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$, то она имеет в этой точке *конечный предел*, согласно свойствам 1 и 2 (см. 7.4) *ограничена* в некоторой *окрестности точки a* и при условии $f(a) \neq 0$ *знакопостоянна*. Кроме того, из правил предельного перехода (7.22)–(7.24) при арифметических операциях следуют свойства непрерывности в точке $a \in \mathbb{R}$:

1) *линейной комбинации* конечного числа $m \in \mathbb{N}$ функций, непрерывных в данной точке, т.е.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = f_k(a) \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m} &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^m c_k f_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^m c_k \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(a), \quad c_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m}; \quad (9.7) \end{aligned}$$

2) *произведения* конечного числа $m \in \mathbb{N}$ функций, непрерывных в данной точке, т.е.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = f_k(a) \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \prod_{k=1}^m f_k(x) = \prod_{k=1}^m f_k(a); \quad (9.8) \end{aligned}$$

3) *частного* двух функций, непрерывных в данной точке, при условии, что значение делителя в этой точке отлично от нуля, т.е.

$$\begin{aligned} (\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}) \wedge (\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}. \quad (9.9) \end{aligned}$$

Свойство (9.8) можно распространить на натуральную степень $n \in \mathbb{N}$ функции, непрерывной в точке a , т.е.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n &= (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n = (f(a))^n. \quad (9.10) \end{aligned}$$

В частности, согласно (7.25) *многочлены* являются непрерывными функциями в любой точке $x \in \mathbb{R}$, а *дробно-рациональная* функция в силу (7.26) непрерывна во всех точках *числовой прямой* \mathbb{R} , кроме точек, в которых ее знаменатель обращается в нуль.

Теорема 9.1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a , а функция $g(y)$ непрерывна в соответствующей точке $b = f(a)$, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке a , или

$$(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b) \wedge (\exists \lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)) \Rightarrow \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a)).$$

◀ В силу непрерывности $g(y)$ в точке $b = f(a)$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: |g(y) - g(b)| < \varepsilon \text{ при } |y - b| < \delta.$$

В силу непрерывности $f(x)$ в точке a для этого δ найдется $\delta_1 > 0$, такое, что при всех x , удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta_1$, неравенство $|f(x) - b| < \delta$ выполняется и, следовательно, для таких x справедливо условие $|g(f(x)) - g(b)| < \varepsilon$. Последнее означает, что

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b) = g(f(a)), \quad (9.11)$$

т.е., согласно определению 9.1, сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке a . ►

Пример 9.3. Функция $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ в силу теоремы 9.1 как суперпозиция непрерывных функций $y = f(x) = x + \pi/2$ (на основании свойства (9.7) непрерывности линейной комбинации непрерывных функций) и $g(y) = \sin y$ (см. пример 9.1). Функция $\operatorname{tg} x = (\sin x)/\cos x$ в силу (9.9) как частное непрерывных функций непрерывна в тех точках $x \in \mathbb{R}$, где $\cos x \neq 0$, т.е. непрерывна при всех $x \neq k\pi + \pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Аналогично функция $\operatorname{ctg} x = (\cos x)/\sin x$ непрерывна в тех точках $x \in \mathbb{R}$, где $\sin x \neq 0$, т.е. при всех $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). #

Отметим, что теорему 9.1 можно обобщить на суперпозицию более чем двух функций.

Если в правой части (9.11) значение $f(a)$ аргумента функции $g(y)$ выразить через предел функции $f(x)$, то получим

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right). \quad (9.12)$$

Следовательно, для непрерывных функций операция предельного перехода перестановочна с операциями по вычислению значения функции в соответствующей точке. Теорема 9.1 позволяет при вычислении предела сложной непрерывной функции удобно чередовать эти операции. Соотношение (9.12) можно рассматривать как частный случай теоремы 7.6 о пределе сложной функции, когда внешняя функция $g(y)$ является непрерывной. В этом случае часто говорят, что знаки предела и непрерывной функции можно переставлять местами.

Пример 9.4. Опираясь на (9.12), вычислим

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x}.$$

Функцию под знаком предела представим в виде

$$(1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = ((1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x})^3$$

и рассмотрим ее как суперпозицию функций $y = f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x}$ и $g(y) = y^3$. Если сделать замену $u = \operatorname{tg} x$, то нетрудно вычислить $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$. Действительно, с учетом *второго замечательного предела* (см. (7.42)) имеем

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = u, \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \pi \end{array} \right| = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e.$$

Тогда в силу непрерывности $g(y) = y^3$ согласно (9.12) получим

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} \right)^3 = e^3.$$

9.3. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва

Пусть функция $f(x)$ определена, по крайней мере, в правой (левой) полукрестности точки $a \in \mathbb{R}$ числовой прямой.

Определение 9.5. Функцию $f(x)$ называют **непрерывной справа в точке a** , если в этой точке существует конечный правый предел функции и он совпадает с ее значением $f(a)$, т.е. если

$$(\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \in \mathbb{R}) \wedge (f(a+0) = f(a)). \quad (9.13)$$

Аналогично определяют функцию, **непрерывную слева в точке a** , как функцию, для которой

$$(\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \in \mathbb{R}) \wedge (f(a-0) = f(a)). \quad (9.14)$$

Если функция определена на отрезке $[a, b]$, то по отношению к его граничным точкам a и b можно говорить лишь о непрерывности функции справа в точке a или слева в точке b . Непрерывность функции в любой внутренней точке промежутка равносильна непрерывности функции в такой точке справа и слева, поскольку существование предела в точке равносильно существованию и равенству правого и левого пределов в этой точке (см. теорему 7.1).

Точку, в которой функция непрерывна, называют **точкой непрерывности** этой функции. В точке a непрерывности функции $f(x)$ должны быть выполнены все следующие условия:

- 1) функция определена в точке a и некоторой ее окрестности;
- 2) существуют оба односторонних предела функции в точке a и они конечны;
- 3) оба односторонних предела функции в точке a совпадают, т.е. $f(a-0) = f(a+0)$;

4) совпадающие односторонние пределы функции в точке a равны значению функции в этой точке, т.е.

$$f(a - 0) = f(a + 0) = f(a). \quad (9.15)$$

Определение 9.6. Функцию, не являющуюся непрерывной в точке $a \in \mathbb{R}$, называют *разрывной* в этой точке, а саму точку a — *точкой разрыва* этой функции.

Говоря о точке a как о точке разрыва, будем предполагать, что любая сколь угодно малая ее окрестность содержит точки из области определения функции $f(x)$, отличные от a (т.е. точка a , по определению 5.10, является предельной для области определения этой функции). Такое требование к точке a не исключает возможность того, что функция $f(x)$ определена, в частности, или в некоторой окрестности точки a , или в полуокрестности этой точки, или в проколотой окрестности, или, наконец, в проколотой полуокрестности точки a .

Сопоставляя определение 9.6 с предшествующими ему условиями 1–4 непрерывности функции в точке, можно усмотреть, при каких обстоятельствах функция разрывна в точке a , или, как иногда говорят, функция терпит разрыв в точке a .

Определение 9.7. Точкой разрыва первого рода называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

Итак, для точки разрыва первого рода выполнено, по крайней мере, условие 2 непрерывности функции в точке (рис. 9.4). Разность $f(a + 0) - f(a - 0)$ конечна, и ее называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода, а про функцию иногда говорят, что она терпит разрыв с конечным скачком. Если скачок равен нулю (см. рис. 9.4, g и d), т.е. в точке a выполнено еще и условие 3 непрерывности функции, а поэтому существу-

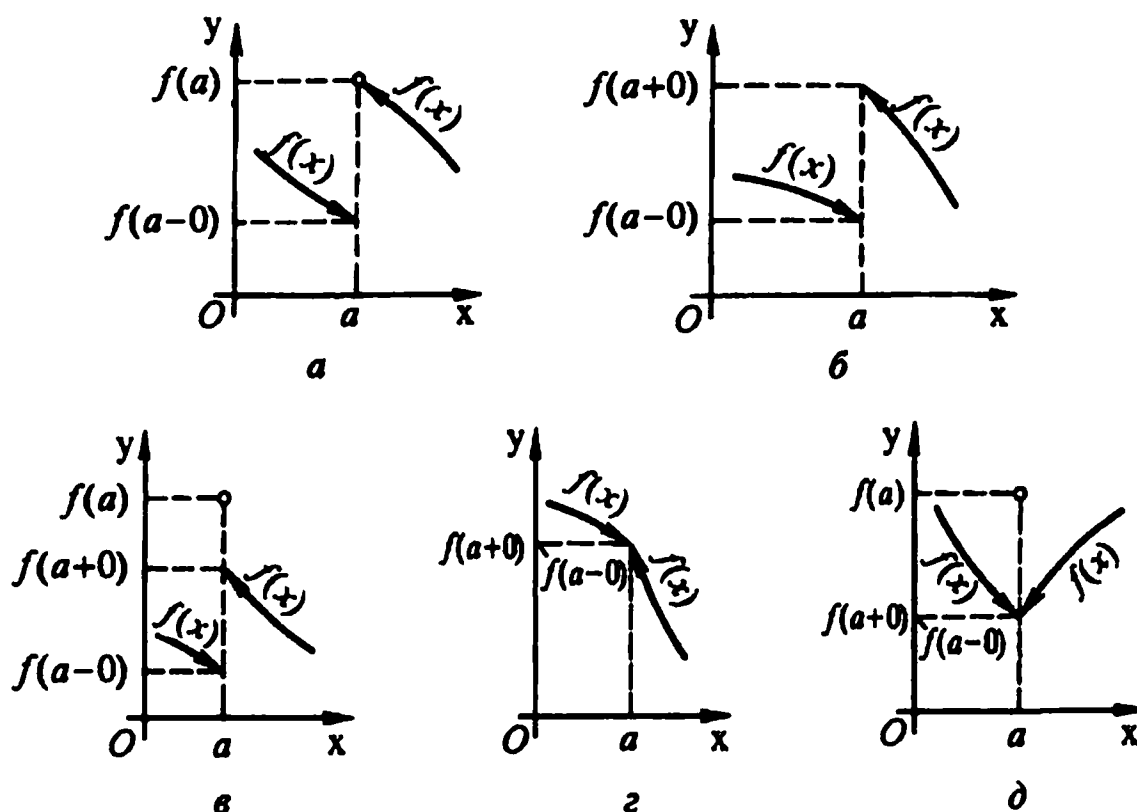


Рис. 9.4

ет конечный предел функции в этой точке, то имеем **точку устранимого разрыва**. Если в этом случае для функции $g(x)$, совпадающей в некоторой проколотой окрестности точки a с $f(x)$, положить, согласно (9.15), $g(a) = f(a+0) = f(a-0)$, то $g(x)$ будет непрерывна в точке a , поскольку все условия 1–4 непрерывности функции в точке a будут выполнены. Про возможность введения такой непрерывной функции $g(x)$ говорят, что разрыв непрерывности $f(x)$ в точке a можно устранить.

Замечание 9.1. Может случиться, что все точки области определения функции в некоторой окрестности точки a лежат по одну сторону от точки a . В этом случае рассматривают только один из односторонних пределов, указанных в определении 9.7. Например, согласно такой договоренности, точку $x = 0$, как правило, не называют точкой разрыва функции $y = \sqrt{x}$, а говорят, что эта функция непрерывна в данной точке справа.

Пример 9.5. Функция $g(x) = (\sin x)/x$ не определена в точке $x = 0$, но из (7.36) с учетом теоремы 7.1 имеем $g(+0) =$

$=g(-0)=1$. Следовательно, $x=0$ — точка устранимого разрыва этой функции. Доопределим функцию $g(x)$ по условию (9.15), положив $g(0)=1$ и записав

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $g(x)$ будет непрерывна в точке $x=0$ (рис. 9.5). #

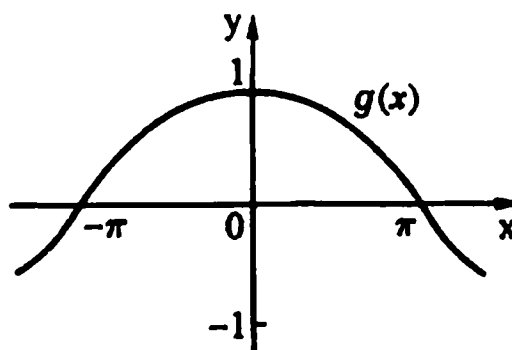


Рис. 9.5

Все точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва первого рода, относят к точкам разрыва второго рода. Учитывая определение 9.7 точки разрыва первого рода, сформулируем следующее определение.

Определение 9.8. Точкой разрыва второго рода называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен или не существует.

Пример 9.6. Определим точки разрыва и выясним их характер для следующих функций.

а. $y = 1/x$. Эта функция непрерывна при любом $x \neq 0$. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Оба односторонних предела не являются конечными, т.е., по определению 9.8, $x=0$ — точка разрыва второго рода (см. рис. 7.7).

б. $y = a^{1/x}$ при $0 < a < 1$. Функция непрерывна при любом $x \neq 0$ и в силу (7.17) $y \rightarrow +0$ при $x \rightarrow +0$, а при $x \rightarrow -0$ $y \rightarrow +\infty$. По определению 9.8, $x=0$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 7.9).

в. $y = \sin(1/x)$. В точке $x=0$ не существуют ни двусторонний, ни односторонние пределы (см. пример 7.5). По опре-

делению 9.8, $x = 0$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 7.10).

9.4. Свойства функций, непрерывных в промежутке

Свойства *функции*, определяемые ее поведением в сколь угодно малой *окрестности* некоторой *точки*, называют локальными свойствами этой функции (например, свойства функции, имеющей в этой точке *предел*, или свойства функции, *непрерывной в данной точке*). Локальные свойства характеризуют поведение функции в каком-то предельном отношении, когда ее *аргумент* стремится к исследуемой точке. В отличие от локальных глобальными называют свойства функции, связанные либо со всей ее *областью определения*, либо с некоторым *промежутком* в этой области.

Определение 9.9. Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной в интервале* (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала, и *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) , в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

Множество функций, непрерывных в интервале (a, b) и на отрезке $[a, b]$, обозначают соответственно $C(a, b)$ и $C[a, b]$. Тогда определению 9.9 будет отвечать символическая запись:

$$f(x) \in C(a, b) :\Leftrightarrow \forall x \in (a, b) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x);$$

$$f(x) \in C[a, b] :\Leftrightarrow (f(x) \in C(a, b)) \wedge \wedge \left(\lim_{\Delta x \rightarrow +0} f(a + \Delta x) = f(a) \right) \wedge \left(\lim_{\Delta x \rightarrow -0} f(b + \Delta x) = f(b) \right).$$

Так, например, функция $f(x) = 1/x$ является непрерывной в интервале $(0, 1)$ и не является непрерывной на отрезке $[0, 1]$, ибо в точке $x = 0$ эта функция не является непрерывной справа. Функция $\sin x$ непрерывна на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

числовой прямой. Если функция непрерывна в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, то она непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$. Тогда говорят, что функция непрерывна (всюду) на \mathbb{R} .

Свойства функций, непрерывных в промежутке (на отрезке или в интервале), интересные и сами по себе, в дальнейшем изложении часто будут служить основой для различных умозаключений. Остановимся на доказательстве теоремы об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции. Это доказательство носит алгоритмический характер и может быть использовано для вычислений.

Теорема 9.2 (первая теорема Больцано — Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется точка c , в которой функция обращается в нуль, т.е.

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a)f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная линия *графика функции* лежит и ниже, и выше оси Ox , то эта линия пересекает ось Ox (рис. 9.6).

◀ Для определенности положим $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $d = (a + b)/2$. Может случиться, что функция $f(x)$ обратится в нуль в этой точке. В этом случае теорема доказана и $c = d$. Пусть $f(d) \neq 0$. Тогда на концах одного из отрезков $[a, d]$, $[d, b]$ функция примет значения разных знаков,

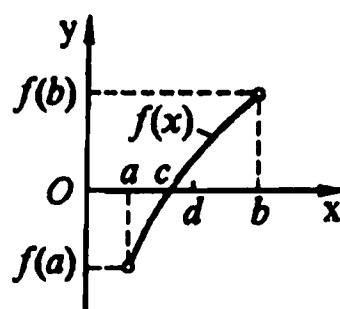


Рис. 9.6

причем отрицательное значение на левом конце и положительное — на правом. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Тогда $f(a_1) < 0$ и $f(b_1) > 0$.

Разделим пополам отрезок $[a_1, b_1]$ и снова отбросим тот случай, когда $f(x)$ обращается в нуль в середине $(a_1 + b_1)/2$

этого отрезка, ибо тогда теорема доказана. Обозначим $[a_2, b_2]$ ту из половин отрезка $[a_1, b_1]$, для которой $f(a_2) < 0$ и $f(b_2) > 0$. Продолжим этот процесс построения отрезков. При этом либо после конечного числа шагов наткнемся на такую точку деления отрезков пополам, в которой функция обращается в нуль, и доказательство теоремы будет завершено, либо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Тогда для n -го отрезка $[a_n, b_n]$ длиной $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ будем иметь $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$.

По *принципу вложенных отрезков* существует точка c , принадлежащая всем этим отрезкам. Покажем, что именно эта точка удовлетворяет требованиям данной теоремы и является искомой точкой $c \in (a, b)$. В силу непрерывности функции в любой точке интервала (a, b) имеем $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Если бы $f(c)$ было положительным, то, согласно свойству сохранения функцией знака своего предела (см. 7.4), у точки c нашлась бы окрестность $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, в которой $f(x) > 0$. При надлежащем выборе n (а именно из условия $(b - a)/2^n < \varepsilon$) отрезок $[a_n, b_n]$ будет целиком включен в эту окрестность, а потому $f(a_n) > 0$. Получили противоречие свойству отрезка $[a_n, b_n]$. Точно так же убеждаемся, что $f(c)$ не может быть отрицательным. Значит, $f(c) = 0$. ►

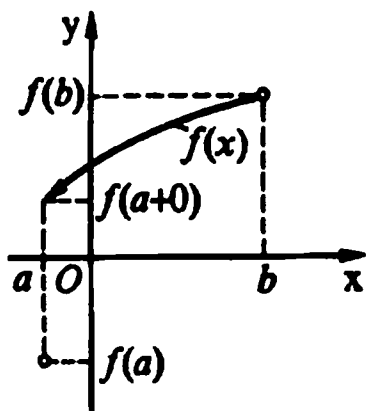


Рис. 9.7

Заметим, что требование непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в условии теоремы 9.2 существенно. Его нельзя заменить требованием непрерывности в интервале (a, b) : на рис. 9.7 дан пример графика функции, непрерывной в интервале (a, b) , но не являющейся непрерывной на отрезке $[a, b]$ в силу нарушения непрерывности справа в точке a . Эта

функция имеет на концах отрезка значения разных знаков, но ни в одной точке отрезка не обращается в нуль. Ясно, что функция, имеющая разрыв хотя бы в одной точке интервала (a, b) , может также перейти от отрицательного значения к положительному, не обращаясь в нуль.

Теорема 9.3 (вторая теорема Больцано — Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X (замкнутом или нет, конечном или бесконечном). Если в двух точках a и b ($a < b$) этого промежутка функция принимает неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то, каково бы ни было число C , лежащее между A и B , найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$.

◀ Будем считать, например, что $A < B$, так что $A < C < B$. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков: $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$ и $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$. Тогда в силу теоремы 9.2 между a и b найдется точка c , для которой $g(c) = 0$, т.е. $f(c) - C = 0$ или $f(c) = C$. ▶

Таким образом, непрерывная в промежутке функция, переходя от одного значения к другому, хотя бы один раз принимает каждое промежуточное между ними значение. Иными словами, значения, принимаемые непрерывной функцией $f(x)$, когда x изменяется в каком-либо промежутке X , сами также заполняют сплошь некоторый промежуток Y . Теорему 9.3 (как и утверждение 5.3) часто называют *теоремой о промежуточном значении непрерывной функции*.

Доказательства дальнейших свойств функций, непрерывных на отрезке или в интервале, даны в Д.9.2. Здесь ограничимся только формулировкой соответствующих теорем, а основное внимание уделим обсуждению и иллюстрации этих свойств.

Теорема 9.4 (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция является *ограниченной* на этом от-

резке, т.е. существуют числа m и M , такие, что $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$.

Существенным условием в этой теореме является непрерывность функции именно на отрезке. Непрерывность лишь на интервале не обеспечивает ограниченности функции. Так, при $x \in (0, \pi/2)$ функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна (см. пример 9.3), но не ограничена (см. рис. 3.18).

Теорема 9.5 (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е.

$$\begin{aligned} f(x) \in C[a, b] &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists x_*, x^* \in [a, b] : \forall x \in [a, b] \quad f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*). \end{aligned}$$

На рис. 9.8 наименьшее и наибольшее значения обозначены соответственно m и M . Существенным условием в этой теореме (как и в предыдущей) является непрерывность функции именно на отрезке, а не вообще на промежутке

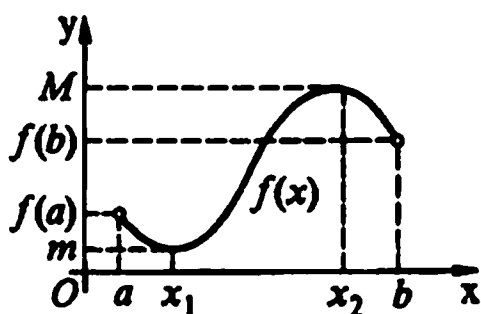


Рис. 9.8

любого типа. Даже сочетание непрерывности и ограниченности не гарантирует достижения функцией наименьшего и наибольшего значений: на \mathbb{R} функция $1/(1+x^2)$ не

прерывна в силу (7.26) как *дробно-рациональная* с не обращающимся в нуль знаменателем и ограничена, но не достигает наименьшего значения (см. рис. 3.15,а).

Учитывая теорему 9.3 о промежуточном значении функции, можно сформулировать следующее положение.

Следствие 9.1. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает в некоторых точках $x_1, x_2 \in [a, b]$ наименьшее $m = f(x_1)$ и наибольшее $M = f(x_2)$ значения, то на отрезке $[x_1, x_2]$ (или на отрезке $[x_2, x_1]$ при $x_2 < x_1$) данная

функция принимает по крайней мере один раз любое значение, заключенное между числами m и M , или

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow \exists \xi \in [a, b]: \forall \eta \in [m, M] f(\xi) = \eta.$$

Это следствие можно проиллюстрировать рис. 9.8. Таким образом, множество значений функции, непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$, сплошь заполняет отрезок $[m, M]$.

Теорема 9.6 (об обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в интервале (a, b) . Тогда в соответствующем (a, b) интервале $(f(a+0), f(b-0))$ (или $(f(b-0), f(a+0))$) значений этой функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, также возрастающая (убывающая) и непрерывная.

9.5. Непрерывность основных элементарных функций

В примерах 9.1 и 9.2 установлена непрерывность на всей числовой прямой \mathbb{R} постоянной функции $f(x) = c = \text{const}$, линейной функции x , тригонометрической $\sin x$ и показательной a^x функций. Как уже сказано в 9.2, из (7.25) следует, что многочлены непрерывны всюду на \mathbb{R} , а дробно-рациональная функция в силу (7.26) непрерывна на \mathbb{R} во всех точках, кроме тех, где ее знаменатель равен нулю. В примере 9.3 установлена непрерывность функции $\cos x$ всюду на \mathbb{R} , а также $\text{tg} x$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ и $\text{ctg} x$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Из теоремы 9.6 следует непрерывность в интервале $(0, +\infty)$ логарифмической функции $\log_a x$ как обратной к строго монотонной и непрерывной на \mathbb{R} показательной функции a^x с областью значений $(0, +\infty)$. Эти функции являются взаимно обратными, возрастающими при $a > 1$ и убывающими при

$0 < a < 1$ (см. рис. 3.16). В частном случае $a = e$ получим, что экспонента e^x и натуральный логарифм $\ln x$ (см. 7.8) являются взаимно обратными и непрерывны соответственно на \mathbb{R} и в интервале $(0, +\infty)$ (см. рис. 7.13).

Для общей степенной функции (см. 3.5) в силу основного логарифмического тождества (7.43) запишем $x^s = \exp(s \ln x)$, $s \in \mathbb{R}$, т.е. получим суперпозицию функций: $y = f(x) = s \ln x$, непрерывной в интервале $(0, +\infty)$, и $g(y) = \exp(y)$, непрерывной на \mathbb{R} . Из теоремы 9.1 о непрерывности сложной функции следует, что x^s непрерывна в каждой точке интервала $(0, +\infty)$.

В частном случае $s = n \in \mathbb{N}$ функция x^n непрерывна на \mathbb{R} согласно обобщению свойства (9.8) непрерывности произведения функций на любую натуральную степень непрерывной на \mathbb{R} функции x . При нечетном n функция x^n с областью значений \mathbb{R} нечетна, возрастает на \mathbb{R} и, согласно теореме 9.6, имеет на \mathbb{R} непрерывную возрастающую обратную функцию $x^{1/n}$. При четном n $y = x^n$ — четная функция с областью значений $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$. В этом случае функция не является монотонной на всей числовой прямой. Но на каждом из промежутков $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$ она строго монотонна, и, согласно теореме 9.6, будут существовать при $x \geq 0$ непрерывные и строго монотонные функции $-x^{1/n}$ и $x^{1/n}$, являющиеся обратными в каждом из указанных промежутков к функции x^n при четном n .

Функция x^{-n} при $n \in \mathbb{N}$ непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и при $x \rightarrow 0$ — бесконечно большая (б.б.) функция ($x = 0$ для этой функции, по определению 9.7, — точка разрыва второго рода). Аналогично предыдущему при нечетном n функция $x^{-1/n}$, определенная на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, является обратной к x^{-n} в каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$ и, согласно теореме 9.6, непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. При четном n функции $-x^{-1/n}$ и $x^{-1/n}$, определенные при $x > 0$, являются обратными к x^{-n} соответственно в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Согласно теореме 9.6 функции $-x^{-1/n}$ и $x^{-1/n}$ непрерывны при $x > 0$.

Для рационального числа $q = k/n \in \mathbb{Q}$ $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (k и n несократимы), функция x^q непрерывна в своей области определения в силу обобщения свойства (9.8) на любую натуральную степень функций $x^{1/n}$ или $x^{-1/n}$.

Обратные тригонометрические функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ (см. рис. 3.19 и 3.20), согласно теореме 9.6, непрерывны на отрезке $[-1, 1]$, поскольку функции $\sin x$ и $\cos x$ строго монотонны и непрерывны соответственно на отрезках $[-\pi/2, \pi/2]$ и $[0, \pi]$, а их значения сплошь заполняют отрезок $[-1, 1]$. Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcsctg} x$ (см. рис. 3.21 и 3.22), согласно теореме 9.6, непрерывны на \mathbb{R} , так как функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ строго монотонны и непрерывны соответственно при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $x \in (0, \pi)$, а их значения сплошь заполняют всю числовую прямую \mathbb{R} .

Таким образом, все основные элементарные функции непрерывны всюду, где они определены. Функции из класса элементарных можно получить при помощи конечного числа алгебраических операций над основными элементарными функциями и их суперпозицией. Из свойств (9.7)–(9.9) арифметических операций с непрерывными функциями и теоремы 9.1 о непрерывности суперпозиции непрерывных функций следует, что элементарные функции непрерывны в своей области определения. Простейшими примерами элементарных функций являются многочлены и дробно-рациональные функции.

Пример 9.7. Рассмотрим функцию $(u(x))^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ — функции, определенные в окрестности $U(a)$ некоторой точки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ расширенной числовой прямой, причем в этой окрестности $u(x) > 0$. Предположим, что существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} v(x) = c \in \mathbb{R}. \quad (9.16)$$

В силу основного логарифмического тождества (7.43) можно записать

$$(u(x))^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)} = \exp(v(x) \ln u(x)) \quad \forall x \in U(a). \quad (9.17)$$

С учетом непрерывности логарифмической функции, согласно (9.12) и (9.8), имеем

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \ln u(x) &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow a} u(x) \right) = \ln b, \\ \lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) &= \lim_{x \rightarrow a} v(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \ln u(x) = c \ln b.\end{aligned}$$

Отсюда в силу непрерывности экспоненты в (9.17)

$$\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) \right) = e^{c \ln b} = (e^{\ln b})^c = b^c. \quad (9.18)$$

Ясно, что если $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке a и $u(x) > 0$, то функция $(u(x))^{v(x)}$, которую называют **показательно-степенной**, будет непрерывна в каждой такой точке a .

Предел показательно-степенной функции можно установить не только при условиях (9.16). Его можно найти, когда известен $\lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) = d$ (конечный или бесконечный). При конечном d искомый предел будет, очевидно, e^d ; если же $d = -\infty$ или $d = +\infty$, то искомый предел будет соответственно 0 или $+\infty$. Определение самого предела $d = \lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x)$ по заданным пределам $b = \lim_{x \rightarrow a} u(x)$ и $c = \lim_{x \rightarrow a} v(x)$ возможно всегда, кроме случаев, когда произведение $v(x) \ln u(x)$ при $x \rightarrow a$ представляет собой **неопределенность** типа $0 \cdot \infty$.

Нетрудно установить, что исключительные случаи отвечают следующим комбинациям значений b и c : 1) $b = 1$, $c = \infty$; 2) $b = +\infty$, $c = 0$; 3) $b = c = 0$. В этих случаях говорят, что выражение $(u(x))^{v(x)}$ при $x \rightarrow a$ представляет собой соответственно неопределенность типа 1^∞ , ∞^0 или 0^0 . Рассмотрим, например, случай $b = 1$, $c = \infty$ и $u(x) \neq 1$ в некоторой окрестности точки a . Тогда, обозначив $p = \lim_{x \rightarrow a} v(x)(u(x) - 1)$, запишем

$$\lim_{x \rightarrow a} (u(x))^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\left(1 + (u(x) - 1) \right)^{1/(u(x) - 1)} \right)^{v(x)(u(x) - 1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\lim_{x \rightarrow a} \left(1 + (u(x) - 1) \right)^{1/(u(x) - 1)} \right)^p = \left| \begin{array}{c} u(x) - 1 = t, \\ t \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{array} \right| = \\
&= \left(\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} \right)^p = e^p. \quad (9.19)
\end{aligned}$$

Пусть, например, $f(x) = (\cos 2x)^{1/(x \sin 2x)}$ и $x \rightarrow 0$. Тогда $v(x) = 1/(x \sin 2x)$, $u(x) - 1 = \cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$, с учетом (7.37)

$$p = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin 2x} (-2\sin^2 x) = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = -1$$

и, согласно (9.19), $\lim_{x \rightarrow 0} = e^p = e^{-1} = 1/e$.

9.6. О вычислении нуля функции, непрерывной на отрезке

Из теоремы 9.3 следует, что на отрезке $X = [\alpha, \beta] \in \mathbb{R}$ существует по крайней мере одна точка ξ , в которой непрерывная на X функция $g(x)$ принимает любое значение η , заключенное между значениями $g(\alpha)$ и $g(\beta)$ этой функции. Если $g(x)$ еще и строго монотонна, то эта точка единственная. Но каким образом найти такую точку?

Если исключить из рассмотрения тривиальный случай $g(\alpha) = g(\beta)$, то эта задача равносильна поиску хотя бы одного действительного корня $\xi \in X$ уравнения $f(x) = 0$, где функция $f(x) = g(x) - \eta$ тоже непрерывна на X , или, как говорят, равносильна нахождению на X по крайней мере одного нуля функции $f(x)$. Так как на концах отрезка X эта функция принимает значения $f(\alpha) = g(\alpha) - \eta$ и $f(\beta) = g(\beta) - \eta$ разных знаков, т.е. $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то существование точки $\xi \in X$, для которой $f(\xi) = 0$, вытекает из теоремы 9.2. Отметим, что при этом условие непрерывности $f(x)$ существенно.

Пример 9.8. а. Функция $1/x$ на концах отрезка $[-1, 1]$ принимает соответственно значения -1 и 1 , но не обращается в нуль на этом отрезке, поскольку терпит разрыв в одной из его точек, а именно в точке $x = 0$ (см. рис. 7.7).

б. Нетрудно заметить, что уравнение $3^x = 9x$ имеет корень $x = 3$. Но непрерывная на \mathbb{R} функция $f(x) = 3^x - 9x$ на концах отрезка $[0, 1]$ принимает значения разных знаков: $f(0) = 1 > 0$ и $f(1) = -6 < 0$, т.е. на этом отрезке есть хотя бы еще один корень данного уравнения. #

Перед вычислением искомого корня уравнения $f(x) = 0$ стараются выделить отрезок $[a, b]$, на котором расположен этот и только этот корень, а функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е. провести **отделение корней уравнения**. Представление о расположении корней уравнения $f(x) = 0$ дают точки пересечения оси абсцисс **графиком** функции $f(x)$ (см. рис. 9.6) даже при его приближенном построении. Если же функция $f(x)$ сложна и построение ее графика вызывает затруднение, то уравнение $f(x) = 0$ стараются преобразовать к виду $h_1(x) = h_2(x)$, чтобы было нетрудно построить графики функций $h_1(x)$ и $h_2(x)$ и по абсциссам точек пересечения этих графиков определить расположение корней уравнения.

Допустим, что отделение искомого корня ξ проведено и указанный отрезок $[a, b]$ выделен. Вычисление значения корня проведем **методом деления отрезка**. Выберем произвольно точку $x_0 \in (a, b)$ и вычислим значение $f(x_0)$. Если $f(x_0) = 0$, то x_0 — искомый корень уравнения $f(x) = 0$; цель достигнута и вычисления прекращаются. Если же $f(x_0) \neq 0$, то из двух отрезков $[a, x_0]$ и $[x_0, b]$ отбрасываем тот, на концах которого совпадают знаки значений функции $f(x)$. Искомый корень теперь расположен на оставленном для дальнейшего рассмотрения отрезке, который обозначим $[a_1, b_1]$. Далее выбираем точку $x_1 \in (a_1, b_1)$ и повторяем описанную процедуру до тех пор, пока на шаге с номером N не произойдет „прямое попадание“, т.е. $f(x_N) = 0$ и x_N — искомый корень данного

уравнения, или же длина $b_N - a_N$ отрезка $[a_N, b_N]$ не станет меньше удвоенной допустимой погрешности вычисления ξ и можно будет принять в качестве его значения $(a_N + b_N)/2$.

Для шага с номером n при $f(a_n)f(b_n) < 0$ алгоритм дальнейшего поиска корня при условии, что $x_n \in [a_n, b_n]$, можно представить в виде

$$f(x_n)f(a_n) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow a_{n+1} = x_n, b_{n+1} = b_n; \\ = 0 & \Rightarrow \xi = x_n; \\ < 0 & \Rightarrow a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (9.20)$$

Такой алгоритм нетрудно запрограммировать на ЭВМ, что позволит ей, „не видя“ графика функции $f(x)$, вести „пристрелку“ и строить *последовательность* уменьшающихся по длине *вложенных друг в друга отрезков*, удерживая на них искомый корень уравнения.

Выбор точки x_n на каждом шаге с номером n может быть различным. Если использовать метод деления отрезка пополам, т.е. $x_n = (a_n + b_n)/2$, то при отсутствии „прямого попадания“ заданная точность ϵ вычисления корня в силу условия $(b - a)/2^n < 2\epsilon$ может быть достигнута на шаге с номером

$$n = \log_2 \frac{b - a}{\epsilon} - 1 = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{b - a}{\epsilon} - 1. \quad (9.21)$$

Итерационная последовательность (см. Д.2.2) $\{x_n\}$ приближенных значений x_n искомого корня сходится к точному значению ξ как геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1/2$.

Другой метод выбора x_n связан с проведением на каждом шаге через точки $A_n(a_n, f(a_n))$ и $B_n(b_n, f(b_n))$ прямой

$$y = f(a_n) + \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}(x - a_n)$$

и с определением точки

$$x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n)$$

пересечения этой прямой с осью абсцисс. Рис. 9.9 иллюстрирует выбор точек x_0 и x_1 на первых двух шагах. Этот метод называют **методом хорд** (а также **методом пропорциональных частей**, **линейного интерполирования**, **ложного положения корня**). Идея метода состоит в приближенной замене дуги кривой графика $f(x)$ между точками A_n и B_n стягивающей ее хордой A_nB_n . Такой метод обеспечивает ускорение сходимости итерационной последовательности $\{x_n\}$ к значению ξ искомого корня уравнения $f(x) = 0$ по мере уменьшения длины отрезка $[a_n, b_n]$ и приближения дуги кривой к стягивающей ее хорде.

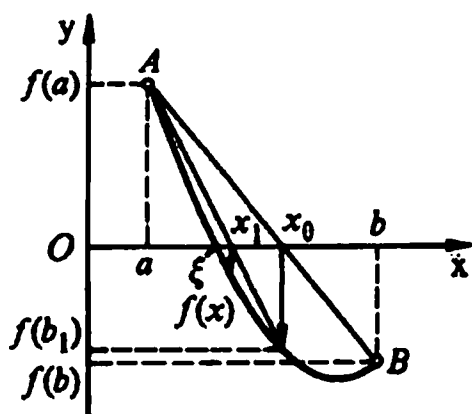


Рис. 9.9

Дополнение 9.1. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, монотонную в некотором промежутке X (конечном или бесконечном, замкнутом или открытом).

Теорема 9.7. Если монотонная в промежутке X функция $f(x)$ имеет внутри него точки разрыва, то они обязательно первого рода.

◀ Пусть для определенности $f(x)$ не убывает в промежутке X . Возьмем любую точку $a \in X$, не совпадающую с левым концом X , и рассмотрим ту часть X , которая лежит влево от a . При $x \rightarrow a - 0$ $f(x)$ не убывает и ограничена сверху, поскольку $f(x) \leq f(a)$ при $x < a$. В силу теоремы 8.16 о пределе монотонной функции заключаем, что существует конечный $\lim_{x \rightarrow a - 0} f(x) = f(a - 0)$, а согласно свойству функции, имеющей конечный предел, получим, что $f(a - 0) \leq f(a)$. Если

$f(a-0) = f(a)$, то $f(x)$ непрерывна в точке a слева. Сходным образом убеждаемся, что в каждой точке $a \in X$, не совпадающей с правым концом X , $f(x)$ либо непрерывна справа, либо имеет конечный предел $f(a+0) > f(a)$. Ход доказательства для невозрастающей на X функции аналогичен.

Итак, во всякой внутренней точке a промежутка X монотонная функция либо имеет точку разрыва первого рода с конечным скачком $f(a+0) - f(a-0)$, либо непрерывна. ►

Замечание 9.2. Если точка b является правым концом промежутка X , то для неубывающей на X ограниченной сверху функции $f(x)$ в силу теоремы 8.16 существует конечный $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b-0)$, а для неубывающей на X неограниченной сверху функции, согласно теореме 8.17, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$.

Аналогично, если точка a является левым концом промежутка X , для неубывающей на X ограниченной снизу функции $f(x)$ существует конечный $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$, а для неубывающей на X неограниченной снизу функции — $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$.

Таким образом, для монотонной в интервале (a, b) функции $f(x)$ всегда существуют конечные или бесконечные значения $f(a+0)$ и $f(b-0)$. Если строго монотонная функция $f(x)$, например, возрастает в интервале (a, b) , то $(f(a+0), f(b-0))$ представляет собой некоторый интервал (конечный или бесконечный). #

Теорема 9.7 позволяет установить удобный для практического применения признак непрерывности монотонной функции на промежутке.

Теорема 9.8. Монотонная в интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна в нем, если ее значения содержатся в одном из интервалов $(f(a+0), f(b-0))$ или $(f(b-0), f(a+0))$ и сплошь заполняют его.

◄ Допустим, что в какой-нибудь точке $x_0 \in (a, b)$ функция $f(x)$ не является непрерывной. Согласно теореме 9.7 x_0 будет

обязательно точкой разрыва первого рода. Для неубывающей функции имеем $f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$, но хотя бы одно из неравенств должно быть строгим, иначе в точке x_0 функция $f(x)$ будет непрерывной.

Пусть, например, $f(x_0 - 0) < f(x_0)$. В силу неубывания функции $f(x)$ и свойств предела (см. 7.4) имеем для $x \leq x_0$ $f(x) \leq f(x_0 - 0)$, а для $x \geq x_0$ $f(x) \geq f(x_0)$. Поэтому интервал $(f(x_0 - 0), f(x_0))$ свободен от значений функции, что противоречит условию теоремы. Аналогичным путем приходим к противоречию, если допускаем существование точки разрыва у невозрастающей в интервале (a, b) функции $f(x)$, что и доказывает теорему. ►

Отметим, что условие сплошного заполнения интервала значениями функции является в этой теореме достаточным для непрерывности монотонной в интервале (a, b) функции. Это условие легко воспринимается, и его удобно использовать на практике.

Дополнение 9.2. Доказательство теорем о функциях, непрерывных в промежутке

Доказательство начнем с теоремы 9.4 (*первой теоремы Вейерштрасса*) об ограниченности функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$. По условию теоремы функция непрерывна в любой точке отрезка. Из свойства ограниченности функции, непрерывной в точке (см. 9.2), для каждой точки x отрезка найдется окрестность $U(x)$ (для точек a и b это будут *полуокрестности*), в которой функция $f(x)$ ограничена. Совокупность таких окрестностей для всех точек отрезка образует его *покрытие*. В силу теоремы 5.6 отрезок является *компактным множеством*, и, по определению 5.12, из любого его покрытия можно выделить хотя бы одно *конечное подпокрытие*, состоящее из конечного числа N таких окрестностей $U(x_n)$,

$n = \overline{1, N}$. В каждой из окрестностей $U(x_n)$ множество значений функции $f(x)$ ограничено, т.е. $\forall x \in U(x_n) \quad |f(x)| \leq C_n$. Поэтому

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq C = \max\{C_1, C_2, \dots, C_N\},$$

что, по определению 3.5, означает, что функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$.

Для доказательства теоремы 9.5 (*второй теоремы Вейерштрасса*) рассмотрим множество значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Согласно теореме 9.4 это множество ограничено, а согласно теореме 2.1 оно имеет *точную верхнюю грань* $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, причем $M \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\forall x \in [a, b]$

$f(x) < M$, т.е. функция $f(x)$ не достигает на отрезке своей точной верхней грани. Вспомогательная функция $g(x) = 1/(M - f(x))$ положительна во всех точках отрезка $[a, b]$, в силу свойств (9.7) и (9.9) непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и с учетом определения 9.5 непрерывна в точке a справа и в точке b слева, а следовательно, в силу определения 9.9 непрерывна на $[a, b]$, а значит, и ограничена на этом промежутке, т.е. $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq \gamma$, причем $\gamma > 0$. Но тогда $f(x) \leq M - 1/\gamma < M$, т.е. число $M - 1/\gamma$ является *мажорантой* рассматриваемого множества значений функции на $[a, b]$, а это противоречит определению точной верхней грани множества как наименьшей из мажорант (см. 2.7). Из этого противоречия следует, что на $[a, b]$ найдется такая точка x^* , для которой $f(x^*) = M$, т.е. функция принимает в этой точке конечное *наибольшее значение*.

Аналогичным путем можно доказать, что на $[a, b]$ найдется такая точка x_* , в которой функция $f(x)$ принимает конечное *наименьшее значение*. Отметим, что справедливость теорем 9.4 и 9.5 следует непосредственно из теоремы 5.10 о функции, непрерывной на *компакте* (см. следствие 5.4), поскольку в силу теоремы 5.6 отрезок является компактом.

При доказательстве теоремы 9.6 о существовании непрерывной обратной к $y = f(x)$ функции для определенности положим, что функция $f(x)$ возрастает в промежутке X , поскольку в случае убывания ход доказательства аналогичен. Значения непрерывной в промежутке X функции, согласно теореме 9.3, заполняют сплошь некоторый промежуток Y . В силу возрастания $f(x)$ в интервале $X = (a, b)$ это будет интервал $Y = (f(a+0), f(b-0))$, так что для каждого значения $y_0 \in Y$ найдется хотя бы одно такое значение $x_0 \in X$, что $f(x_0) = y_0$. Ввиду строгой монотонности функции $f(x)$ такое значение x_0 будет единственным, поскольку при $x_1 > x_0$ $f(x_1) > y_0$, а при $x_1 < x_0$ $f(x_1) < y_0$. Сопоставляя именно это значение $x_0 \in X$ произвольно взятому значению $y_0 \in Y$, получаем однозначную функцию $x = f^{-1}(y)$, обратную к функции $y = f(x)$. Функция $f^{-1}(y)$ будет, как и функция $f(x)$, возрастающей.

Действительно, пусть $y_1 < y_2$ и $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Если бы $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, то это означало, что $x_1 \geq x_2$, и в силу возрастания функции $f(x)$ получили бы $f(x_1) \geq f(x_2)$, т.е. $y_1 \geq y_2$, что противоречит исходному предположению. Стало быть, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ и $x = f^{-1}(y)$ в интервале Y возрастает.

Значения функции $f^{-1}(y)$, возрастающей в интервале Y , сплошь заполняют интервал $X = (a, b)$. Поэтому в силу теоремы 9.8 функция $f^{-1}(y)$ является непрерывной в интервале $Y = (f(a+0), f(b-0))$.

Вопросы и задачи

9.1. Требуется изготовить металлическую квадратную пластину со стороной $a = 100$ мм. В каких пределах допустимо изменить длину x стороны этой пластины, если ее площадь $S = x^2$ не может отличаться от номинальной $S_0 = 0,01 \text{ м}^2$ больше чем на: а) $+1 \text{ см}^2$; б) $+0,1 \text{ см}^2$?

9.2. Ребро куба больше 2м, но меньше 3м. С какой абсолютной погрешностью δ допустимо измерить длину x ребра этого куба, чтобы его объем V можно было вычислить с абсолютной погрешностью ε , не превышающей: а) $0,1\text{м}^3$; б) $0,01\text{м}^3$?

9.3. Сформулировать на языке $\varepsilon - \delta$ утверждение: функция $f(x)$ определена в точке a , но разрывна в этой точке.

9.4. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такие, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, если только $|x - a| < \delta$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a , если числа ε образуют: а) конечное множество; б) бесконечное множество дробей вида $1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$?

9.5. Найти точки разрыва и исследовать их характер для функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{x}{(1+x)^2}; \quad \text{б) } \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}; \quad \text{в) } \frac{x}{\sin x}; \quad \text{г) } \cos^2 \frac{1}{x}; \\ \text{д) } & e^{x+1/x}; \quad \text{е) } \frac{1}{1-e^{x/(1-x)}}; \quad \text{ж) } \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

9.6. Исследовать на непрерывность и выяснить характер точек разрыва функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad \text{б) } g(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1; \end{cases} \\ \text{в) } h(x) &= \begin{cases} \cos \pi x/2, & |x| \leq 1, \\ |x-1|, & |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

9.7. Функция $f(x)$ не определена в точке $x=0$. Доопределить ее так, чтобы она была непрерывна в этой точке, если $f(x)$ равна:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad \text{б) } \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}; \quad \text{в) } (1+x)^{1/x}; \\ \text{г) } & \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}; \quad \text{д) } \frac{e^{-1/x^2}}{x^2}; \quad \text{е) } x \ln^2 x. \end{aligned}$$

9.8. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции является разрывной функцией. Построить пример функции, разрывной всюду на \mathbb{R} , квадрат которой есть функция непрерывная.

9.9. Исследовать на непрерывность функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и $g(x)$ равна:

а) $1 + x^2$; б) $x(1 - x^2)$; в) $1 + x - [x]$.

9.10. Показать, что существует единственная непрерывная функция $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению Кеплера $y - \varepsilon \sin x = x$ при $0 < \varepsilon < 1$.

9.11. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg} x = kx$ для каждого $k \in \mathbb{R}$ имеет в интервале $(0, \pi)$ единственный корень x .

9.12. Может ли немонотонная на \mathbb{R} функция иметь однозначную обратную функцию?

9.13. В каком случае функция $y = f(x)$ и обратная к ней $x = f^{-1}(y)$ представляют собой одну и ту же функцию?

9.14. Доказать теорему 9.4 об ограниченности функции, непрерывной на отрезке, опираясь на теорему 6.11 о возможности из ограниченной последовательности выделить подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

10. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Под *асимптотическим поведением* (или *асимптотической*) *функции* в окрестности некоторой точки a (конечной или бесконечной) понимают характер изменения функции при стремлении ее аргумента x к этой точке. Это поведение обычно стараются представить с помощью другой, более простой и изученной функции, которая в окрестности точки a с достаточной точностью описывает изменение интересующей нас функции или оценивает ее поведение с той или иной стороны. В связи с этим возникает задача сравнения характера изменения двух функций в окрестности точки a , связанная с рассмотрением их частного. Особый интерес представляют случаи, когда при $x \rightarrow a$ обе функции являются либо бесконечно малыми (б.м.), либо бесконечно большими (б.б.).

10.1. Сравнение бесконечно малых функций

Основная цель сравнения б.м. функций состоит в сопоставлении характера их приближения к нулю при $x \rightarrow a$, или скорости их стремления к нулю. Пусть б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ отличны от нуля в некоторой *проколотовой окрестности* $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , а в точке a они равны нулю или не определены.

Определение 10.1. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют б.м. *одного порядка* при $x \rightarrow a$ и записывают $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(\beta(x))$ (символ O читают „ O большое“), если при $x \rightarrow a$ существует отличный от нуля *конечный предел* отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, т.е.

$$\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(\beta(x)) : \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (10.1)$$

Очевидно, что тогда, согласно (7.24), $\exists \lim_{x \rightarrow a} \beta(x)/\alpha(x) = 1/c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и правомерна запись $\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} O(\alpha(x))$. Символ O обладает свойством *транзитивности*, т.е. если $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} O(\beta(x))$ и $\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} O(\gamma(x))$, то $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} O(\gamma(x))$. В самом деле, с учетом определения 10.1 и свойства *произведения* функций (см. (7.23)), имеющих конечные (в данном случае не равные нулю) пределы, получим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\gamma(x)\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (10.2)$$

Определение 10.2. Функцию $\alpha(x)$ называют **б.м. более высокого порядка** малости по сравнению с $\beta(x)$ (или относительно $\beta(x)$) при $x \rightarrow a$ и записывают $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} o(\beta(x))$ (символ o читают “о малое”), если существует и равен нулю предел отношения $\alpha(x)/\beta(x)$, т.е.

$$\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} o(\beta(x)) : \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0. \quad (10.3)$$

В этом случае также говорят, что функция $\beta(x)$ является **б.м. более низкого порядка** малости по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$, причем слово „малости“ обычно опускают (как и в случае более высокого порядка в определении 10.2). Сказанное означает, что если $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x)/\beta(x)) = \infty$, то функция $\beta(x)$ является, согласно определению 10.2, б.м. более высокого порядка по сравнению с $\alpha(x)$ при $x \rightarrow a$ и $\alpha(x)$ есть б.м. более низкого порядка по сравнению с $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$, ибо в этом случае $\lim_{x \rightarrow a} (\beta(x)/\alpha(x)) = 0$. Так что можно записать

$$\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} o(\alpha(x)) : \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty. \quad (10.4)$$

Согласно теореме 7.3 о связи функции, ее предела и б.м. функции из (10.3) следует, что $\alpha(x)/\beta(x) = \gamma(x)$ — функция, б.м.

при $x \rightarrow a$. Отсюда $\alpha(x) = \gamma(x)\beta(x)$, т.е. значения $|\alpha(x)|$ при x , близких к a , много меньше значений $|\beta(x)|$. Иными словами, функция $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее функции $\beta(x)$.

Теорема 10.1. Произведение любых б.м. при $x \rightarrow a$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, отличных от нуля в некоторой проколотой окрестности точки a , есть при $x \rightarrow a$ б.м. функция более высокого порядка по сравнению с каждым из сомножителей.

◀ Действительно, согласно определению 10.2 б.м. более высокого порядка (с учетом определения 7.10 б.м. функции), равенства

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

означают справедливость утверждения теоремы. ►

Равенства, содержащие символы O и o , иногда называют **асимптотическими оценками**.

Определение 10.3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **несравнимыми б.м.** при $x \rightarrow a$, если не существует ни конечного, ни бесконечного предела их отношения, т.е. если $\nexists \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)/\beta(x)$ (равно как $\nexists \lim_{x \rightarrow a} \beta(x)/\alpha(x)$).

Пример 10.1. а. Функции $\alpha(x) = x$ и $\beta(x) = \sin 2x$ в силу определения 10.1 — б.м. одного порядка при $x \rightarrow 0$, так как с учетом (7.24), (7.33) и (7.36)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left| \begin{array}{l} 2x = t, \\ t \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{array} \right| = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \neq 0.$$

б. Функция $\alpha(x) = 1 - \cos x$, по определению 10.2, — б.м. более высокого порядка по сравнению с $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$, поскольку с учетом (7.23), (7.33) и (7.36)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{x/2} = \left| \begin{array}{l} x/2 = t, \\ t \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 1 \cdot 0 = 0.$$

в. Функция $\alpha(x) = \sqrt[3]{x}$ есть б.м. более низкого порядка по сравнению с $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$$

г. Функции $\alpha(x) = x \sin(1/x)$ и $\beta(x) = x$ согласно определению 10.3 — несравнимые б.м. при $x \rightarrow 0$, поскольку предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

не существует (ни конечного, ни бесконечного — см. пример 7.5).

д. *Степенная функция* x^n с показателем степени $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, является при $x \rightarrow a$ б.м. более высокого порядка по сравнению с x^{n-1} , т.е. $x^n \underset{x \rightarrow a}{\sim} o(x^{n-1})$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} (x^n/x^{n-1}) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. #

При необходимости более точной сравнительной характеристики поведения б.м. функций при $x \rightarrow a$ одну из них выбирают в качестве своего рода эталона и называют ее основной. Конечно, выбор основной б.м. в известной мере произволен (стремаясь выбрать попроще: x при $x \rightarrow 0$; $x-1$ при $x \rightarrow 1$; $1/x$ при $x \rightarrow \infty$ и т.п.). Из степеней $\beta^k(x)$ основной б.м. функции $\beta(x)$ с различными показателями $k > 0$ (при $k \leq 0$ $\beta^k(x)$ не является б.м.) составляют **шкалу сравнения** для оценки более сложной б.м. функции $\alpha(x)$.

Определение 10.4. Функцию $\alpha(x)$ называют **б.м. k -го порядка** малости относительно $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$, а число k — **порядком малости**, если функции $\alpha(x)$ и $\beta^k(x)$ являются б.м. одного порядка при $x \rightarrow a$, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (10.5)$$

Слово „малости“ и в этом случае обычно опускают.

Отметим:

1) порядок k одной б.м. функции относительно другой может быть любым положительным числом;

2) если порядок функции $\alpha(x)$ относительно $\beta(x)$ равен k , то порядок функции $\beta(x)$ относительно $\alpha(x)$ равен $1/k$;

3) не всегда для б.м. функции $\alpha(x)$, даже сравнимой со всеми степенями $\beta^k(x)$, можно указать определенный порядок k .

Пример 10.2. а. Функция $\alpha(x) = 1 - \cos x$, согласно определению 10.4, — б.м. порядка $k = 2$ относительно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$, так как с учетом (7.23), (7.33) и (7.36)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \left| \begin{array}{l} x/2 = t, \\ t \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

б. Рассмотрим функции $\alpha(x) = a^{1/x}$, $a \in (0, 1)$ и $\beta(x) = x$, б.м. при $x \rightarrow +0$. Покажем, что при любом $k > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^{1/x}}{x^k} = 0. \quad (10.6)$$

Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^{1/x}}{x^k} = \left| \begin{array}{l} 1/x = t, \\ t \xrightarrow{x \rightarrow +0} +\infty \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^t t^k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^k}{(1/a)^t} = 0$$

согласно (7.32). Таким образом, б.м. при $x \rightarrow +0$ функция $a^{1/x}$ сравнима с x^k при любом $k > 0$, но указать для этой функции порядок малости относительно x не удастся. #

Определить порядок одной б.м. функции относительно другой не всегда просто. Можно рекомендовать такой порядок действий:

- 1) написать под знаком предела отношение $\alpha(x)/\beta^k(x)$;
- 2) проанализировать записанное отношение и попытаться упростить его;
- 3) опираясь на известные результаты, выдвинуть предположение о возможном значении k , при котором будет существовать не равный нулю конечный предел;
- 4) проверить предположение путем вычисления предела.

Пример 10.3. Определим порядок б.м. функции $\operatorname{tg} x - \sin x$ относительно x при $x \rightarrow 0$, т.е. найдем такое число $k > 0$, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^k} = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (10.7)$$

Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^k \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2) \cdot \sin x}{x^k \cos x}.$$

На этом этапе, зная, что при $x \rightarrow 0$, согласно (7.35) и (7.36), $(\sin x)/x \rightarrow 1$ и $\cos x \rightarrow 1$, и учитывая (7.23) и (7.33), можно определить, что условие (10.7) будет выполнено при $k = 3$. Действительно, непосредственное вычисление предела при $k = 3$ дает значение $A = 1/2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{4(x/2)^2} \cdot \frac{\sin x}{x \cos x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отметим, что при $k > 3$ получим бесконечный предел, а при $0 < k < 3$ предел будет равен нулю.

10.2. Эквивалентные бесконечно малые функции

Среди б.м. функций одного порядка особое место в приложениях занимают эквивалентные б.м. функции.

Определение 10.5. Б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют **эквивалентными** при $x \rightarrow a$ и обозначают $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$, если предел их отношения при $x \rightarrow a$ равен единице, или

$$\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x) : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1. \quad (10.8)$$

Свойство эквивалентности б.м. функций симметрично, поскольку из (10.8) следует $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x)/\alpha(x) = 1$ и $\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha(x)$.
Транзитивность свойства эквивалентности

$$(\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)) \wedge (\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \gamma(x)) \Rightarrow \alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \gamma(x) \quad (10.9)$$

вытекает с учетом (10.8) непосредственно из (10.2).

Запись вида $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$ иногда называют **асимптотическим равенством** функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в окрестности точки a . Данное асимптотическое равенство можно читать слева направо и справа налево. Но обычно слева записывают изучаемую функцию, а справа эквивалентную ей более простую или более изученную функцию, и в этом случае говорят, что установлена **асимптотика** изучаемой функции в окрестности данной точки.

Теорема 10.2. Для того чтобы две б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными при $x \rightarrow a$, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\alpha(x) - \beta(x)$ была б.м. более высокого порядка по сравнению с каждой из них, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\alpha(x)) \right) \wedge \left(\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\beta(x)) \right). \end{aligned}$$

◀ Пусть $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$. Тогда с учетом определения 10.5

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

и, согласно определению 10.2, $\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\beta(x))$. Аналогично можно доказать, что $\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\alpha(x))$.

Обратно, при $\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\beta(x))$ с учетом определения 10.2 имеем

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

а это, по определению 10.5, означает, что $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$. Из предположения $\alpha(x) - \beta(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\alpha(x))$ следует такой же результат. ►

Теорема 10.3. Если б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются эквивалентными при $x \rightarrow a$, а функция $x(t)$ в некоторой *проколотой окрестности* $\overset{\circ}{U}(\tau)$ точки τ отлична от a и при $t \rightarrow \tau$ стремится к a , то *сложные функции* $\alpha(x(t))$ и $\beta(x(t))$ эквивалентны при $t \rightarrow \tau$.

◄ В самом деле, согласно (7.33) и условию данной теоремы, с учетом (10.8) для сложной функции $F(t) = \alpha(x(t)) / \beta(x(t))$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \tau} F(t) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\alpha(x(t))}{\beta(x(t))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

что, по определению 10.5, означает $\alpha(x(t)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x(t))$. ►

Эта теорема позволяет использовать замену переменных при установлении эквивалентности б.м. функций. Принимая во внимание (10.8), установим некоторые основные соотношения эквивалентности *элементарных функций*.

1. Согласно *первому замечательному пределу* (7.36)

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (10.10)$$

2. В силу (7.37)

$$\operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (10.11)$$

3. Функция $x(t) = \arcsin t$ непрерывна в точке $t=0$ (см. 9.5), и поэтому в силу (9.1) $\lim_{t \rightarrow 0} \arcsin t = \arcsin 0 = 0$. Согласно (10.10) и теореме 10.3 $t = \sin(\arcsin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \arcsin t$, или, возвращаясь к обозначению аргумента через x ,

$$\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (10.12)$$

4. Из непрерывности в точке $t=0$ функции $x(t) = \arctg t$ (см. 9.5) следует $\lim_{t \rightarrow 0} \arctg t = \arctg 0 = 0$. Тогда из (10.11) и теоремы 10.3 $t = \tg(\arctg t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \arctg t$, или, обозначая аргумент через x , имеем

$$\arctg x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (10.13)$$

5. Исходя из второго замечательного предела, заключаем, что $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$. В силу непрерывности функции $\ln y$ в точке $y=e$ с учетом (9.12) получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1,$$

или

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (10.14)$$

Поскольку $\log_a(1+x) = (\ln(1+x))/\ln a$, согласно (10.14) имеем

$$\log_a(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\ln a}. \quad (10.15)$$

6. В силу непрерывности функции $x(t) = e^t - 1$ в точке $t=0$ (см. 9.5) $\lim_{t \rightarrow 0} (e^t - 1) = 0$. Согласно (10.14) можно записать $\ln(1+e^t - 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} e^t - 1$, или $t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} e^t - 1$. Возвращаясь к обозначению аргумента через x , получим

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (10.16)$$

7. С учетом (10.16) вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} x = e^t - 1, \\ t = \ln(1+x), \\ t \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+e^t - 1)^s - 1}{e^t - 1} =$$

$$= s \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{st} - 1}{st} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = s \cdot 1 \cdot 1 = s.$$

Следовательно, $(1+x)^s - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} sx$, или при $s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{(1+x)^s - 1}{s} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (10.17)$$

В частности, при $s = 1/2$ $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x/2$.

Из полученных соотношений (10.10)–(10.17) с учетом транзитивности свойства эквивалентности (10.9) следует

$$\begin{aligned} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{arctg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \\ \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln a \cdot \log_a(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(1+x)^s - 1}{s}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Еще раз отметим, что, согласно теореме 10.3, в этой цепочке эквивалентных при $x \rightarrow 0$ б.м. функций аргумент x сам может быть функцией, которая отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(\tau)$ точки τ и $\lim_{t \rightarrow \tau} x(t) = 0$. В частности, при $a > 0$ будем иметь

$$a^x - 1 = (e^{\ln a})^x - 1 = e^{x \ln a} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln a.$$

Полагая, например, в (10.14) $x = t - 1$, при $t \rightarrow 1$ получим $\ln(1+t-1) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} t - 1$. Итак,

$$a^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln a, \quad (10.19)$$

$$\ln x \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1. \quad (10.20)$$

Учитывая (10.14), (10.16) и (10.20), можно, например, записать

$$\ln(1+\sin x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{tg} x, \quad e^{\cos x} - 1 \underset{x \rightarrow \pi/2}{\sim} \cos x, \quad \ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos x - 1.$$

Теорема 10.4. Пусть $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$ и $f(x)$ — некоторая функция, определенная в проколотой окрестности точки a . Тогда, если существует предел при $x \rightarrow a$ произведения $\alpha(x)f(x)$

(или частного $f(x)/\alpha(x)$), он не изменится при замене $\alpha(x)$ на эквивалентную при $x \rightarrow a$ б.м. функцию $\beta(x)$, или

$$\begin{aligned} \left(\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)\alpha(x) = b \right) \wedge \left(\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x) \right) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)\beta(x) = b, \quad (10.21) \end{aligned}$$

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = b \right) \wedge \left(\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x) \right) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\beta(x)} = b. \quad (10.22)$$

◀ Действительно, с учетом (10.8) и (7.23)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x)\beta(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)f(x)\alpha(x)}{\alpha(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)\alpha(x) = 1 \cdot b = b, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = 1 \cdot b = b. \quad \blacktriangleright$$

Из этой теоремы следует удобное для использования (10.18) правило: предел отношения б.м. при $x \rightarrow a$ функций равен пределу отношения эквивалентных им при $x \rightarrow a$ б.м. функций.

Пример 10.4. Вычислим с учетом (10.18)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{e^{x^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2(x/2)}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x/2)^2}{x^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

10.3. Главная часть бесконечно малой функции

Согласно утверждению 7.4 сумма конечного числа функций, б.м. при $x \rightarrow a$, есть снова б.м. при $x \rightarrow a$ функция. Пусть $\alpha_n(x)$, $n = \overline{1, N}$, — б.м. при $x \rightarrow a$ функции и $\alpha(x)$ — их сумма. Если для $n = \overline{2, N}$ $\alpha_n(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\alpha_1(x))$, то $\alpha_1(x)$ называют

главной частью суммы б.м. при $x \rightarrow a$ функций. Иначе, главная часть суммы б.м. — это слагаемое более низкого порядка малости по сравнению с каждым из остальных слагаемых. Ясно, что если в сумме есть несравнимые слагаемые (см. определение 10.3), то выделить главную часть не удастся.

Пример 10.5. Для суммы $\sin x + \ln(1 + x^2) + \sqrt[3]{x}$ б.м. при $x \rightarrow 0$ функций главной частью будет $\sqrt[3]{x}$, поскольку с учетом (10.18) и теоремы 10.4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} = 0,$$

т.е. $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} o(\sqrt[3]{x})$ и $\ln(1 + x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} o(\sqrt[3]{x})$ согласно определению 10.2. #

Когда для каждого слагаемого в сумме б.м. при $x \rightarrow a$ функций можно указать *порядок k относительно $x - a$* , главной частью такой суммы будет слагаемое (если оно единственное) низшего порядка. В сумме б.м. при $x \rightarrow \infty$ функций главной частью будет слагаемое низшего порядка относительно $1/x$ при условии, что оно единственное, и для каждого слагаемого можно указать порядок малости.

Теорема 10.5. Сумма конечного числа б.м. при $x \rightarrow a$ функций эквивалентна своей главной части, или

$$\forall n = \overline{2, N} \quad \alpha_n(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(\alpha_1(x)) \Rightarrow \alpha(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha_1(x).$$

◀ Если $\alpha_1(x)$ — главная часть суммы $\alpha(x)$, то с учетом свойства (7.22) суммы функций, имеющих конечные пределы, и определения 10.2 найдем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} \right) = 1 + \sum_{n=1}^N \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_n(x)}{\alpha_1(x)} = 1,$$

что, согласно (10.8), означает эквивалентность при $x \rightarrow a$ суммы б.м. функций и ее главной части. ►

Следствие 10.1. В некоторой *проколотой окрестности* $\mathring{U}(a)$ точки a сумма конечного числа б.м. при $x \rightarrow a$ функций сохраняет знак своей главной части, или

$$\begin{aligned} \left(\alpha(x) = \sum_{n=1}^N \alpha_n(x) \right) \wedge \left(\forall n = \overline{2, N} \quad \alpha_n(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(\alpha_1(x)) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \mathring{U}(a) : \forall x \in \mathring{U}(a) \quad \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} > 0. \quad (10.23) \end{aligned}$$

◀ В ходе доказательства теоремы 10.5 установлено, что при $x \rightarrow a$ $\alpha(x)/\alpha_1(x) \rightarrow 1$. Из свойства функции, имеющей в точке a отличный от нуля конечный предел, сохранять в некоторой проколотой окрестности этой точки знак предела, следует (10.23). ►

Пример 10.6. а. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + x + \sqrt[5]{x}}{\sin \sqrt[5]{x}}.$$

Так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[10]{x^3} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[5]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{x^4} = 0,$$

то в силу (10.3) $\sqrt{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\sqrt[5]{x})$ и $x \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\sqrt[5]{x})$. Главной частью числителя дроби под знаком предела будет б.м. при $x \rightarrow 0$ функция $\sqrt[5]{x}$, которая, согласно теореме 10.5, эквивалентна при $x \rightarrow 0$ всему числителю. Из (10.18) и теоремы 10.3 $\sin \sqrt[5]{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt[5]{x}$. Таким образом, и числитель, и знаменатель эквивалентны одной и той же б.м. при $x \rightarrow 0$ функции $\sqrt[5]{x}$, т.е. в силу (10.9) они эквивалентны при $x \rightarrow 0$ между собой, и искомый предел равен, по определению 10.5, единице.

б. Найдем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 2x}{\arcsin x}.$$

Числитель дроби под знаком предела является суммой двух б.м. при $x \rightarrow 0$ функций $2x$ и $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$. Главной частью этой суммы будет $2x$, так как из примера 10.2.а следует, что $2\sin^2(x/2) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(2x)$. В силу (10.18) $\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Заменяв числитель и знаменатель дроби на эквивалентные им при $x \rightarrow 0$ б.м. функции соответственно $2x$ и x , получим, что данный предел равен 2.

в. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - \sin x + \operatorname{tg} x}{\ln(1 + x^3)}.$$

Числитель дроби под знаком предела является алгебраической суммой трех б.м. при $x \rightarrow 0$ функций, причем $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$, и согласно (10.5), (10.8), (10.18) $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$ и $\operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$, т.е. два слагаемых имеют одинаковый (первый) порядок относительно x . В этом случае надо иначе разбить сумму б.м. функций, с тем чтобы выделить ее главную часть. Из примера 10.3 с учетом (10.8) следует, что $\operatorname{tg} x - \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3/2$, и по теореме 10.5 числитель дроби под знаком предела эквивалентен б.м. при $x \rightarrow 0$ функции $x^3/2$, поскольку $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3/2)$. Знаменатель дроби в силу (10.18) и теоремы 10.3 эквивалентен при $x \rightarrow 0$ б.м. функции x^3 . В итоге данный предел равен $1/2$. #

В общем случае можно говорить о главной части не только алгебраической суммы $\alpha(x)$ конечного числа б.м. при $x \rightarrow a$ функций, но и произвольной по структуре функции $\alpha(x)$, эквивалентной при $x \rightarrow a$ степенной функции $A(x - a)^k$. Тогда, согласно теореме 10.2,

$$\alpha(x) = A(x - a)^k + \gamma(x), \quad A \neq 0, \quad k > 0, \quad (10.24)$$

где $\gamma(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x - a)^k)$ — б.м. функция более высокого порядка по сравнению с $(x - a)^k$ при $x \rightarrow a$.

Степенная функция $A(x-a)^k$ будет главной частью б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$. Покажем, что представление функции $\alpha(x)$ в виде (10.24) единственное. В самом деле, если бы наряду с ним было возможно представление $\alpha(x) = B(x-a)^m + \delta(x)$, где $B \neq 0$, $m > 0$ и $\delta(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o((x-a)^m)$, то, согласно теореме 10.2,

$$A(x-a)^k \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} B(x-a)^m,$$

что возможно в силу (10.8) лишь при $B = A$ и $m = k$.

Процедура выделения главной части в виде $A(x-a)^k$ для б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\alpha(x)$ связана с рассмотрением предела

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{A(x-a)^k}$$

и подбором значений k и A , так, чтобы этот предел оказался равным единице. После выделения главной части ее можно использовать для приближенного вычисления значений функции $\alpha(x)$ при значениях x в некоторой окрестности точки a . Возникающая при этом абсолютная $|\gamma(x)|$ и относительная $|\gamma(x)/\alpha(x)|$ погрешности будут стремиться к нулю при $x \rightarrow a$.

Если требуется более высокая точность вычисления значений или представления функции $\alpha(x)$ в окрестности точки a , то следует попытаться выделить главную часть из б.м. при $x \rightarrow a$ функции $\gamma(x)$. Эту процедуру можно продолжить. Такую процедуру уточнения называют построением *асимптотического разложения* функции в окрестности данной точки.

Пример 10.7. Пусть точность замены по (10.17) при $s = 1/2$ и $x \rightarrow 0$ функции $\sqrt{1+x} - 1$ на функцию $x/2$ недостаточна. Выделим из функции $\gamma(x) = \sqrt{1+x} - 1 - x/2$ главную часть в виде Ax^k , подобрав A и k из условия $\gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} Ax^k$. Для этого преобразуем:

$$\gamma(x) = \frac{\sqrt{1+x} - (1+x/2)}{\sqrt{1+x} + (1+x/2)} \left(\sqrt{1+x} + (1+x/2) \right) =$$

$$= \frac{1+x - (1+x/2)^2}{\sqrt{1+x} + 1+x/2} = \frac{-x^2/4}{\sqrt{1+x} + 1+x/2}.$$

Нетрудно заметить, что $\gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2/8$. Отсюда $A = -1/8$ и $k = 2$. Тогда

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \delta(x),$$

где $\delta(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$. Если потребуется еще более высокая точность, то наступит очередь выделять главную часть из б.м. при $x \rightarrow 0$ функции $\delta(x)$ и т.д. #

Если для двух б.м. при $x \rightarrow a$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ известны их главные части, соответственно $A(x-a)^k$ и $B(x-a)^m$, то что можно сказать о главной части суммы $\alpha(x) + \beta(x)$?

При $k \neq m$ главной частью суммы будет то из слагаемых $A(x-a)^k$ и $B(x-a)^m$, в котором показатель степени меньше. Если же $k = m$, то главная часть суммы есть $(A+B)(x-a)^k$ при условии, что $A+B \neq 0$. В противном случае главные части слагаемых взаимно уничтожаются, и сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ оказывается при $x \rightarrow a$ б.м. функцией более высокого порядка, чем каждое из слагаемых. В этом случае приходится выделять из нее б.м. функцию вида $C(x-a)^q$ при $q > k$.

Пример 10.8. а. Функции $\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1$ и $\beta(x) = \sqrt{1-x} - 1$ являются б.м. при $x \rightarrow 0$. Из примера 10.7 следует, что при $x \rightarrow 0$

$$\alpha(x) = \sqrt{1+x} - 1 = x/2 + \gamma_1(x) = x/2 - x^2/8 + \delta_1(x),$$

$$\beta(x) = \sqrt{1-x} - 1 = -x/2 + \gamma_2(x) = -x/2 - x^2/8 + \delta_2(x),$$

где $\gamma_i(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$, $\delta_i(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$, $i = 1, 2$. Отсюда

$$\alpha(x) + \beta(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = -\frac{x^2}{4} + \delta(x),$$

где $\delta(x) = \delta_1(x) + \delta_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$, и главной частью суммы заданных функций при $x \rightarrow 0$ будет $-x^2/4$.

б. Рассмотрим теперь функции $\alpha(x) = \ln(1 + 3x + x^2)$ и $\beta(x) = \ln(1 - 3x + x^2)$, являющиеся б.м. при $x \rightarrow 0$. Из (10.18) с учетом теоремы 10.3 получим

$$\ln(1 + 3x + x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 3x + x^2 \quad \text{и} \quad \ln(1 - 3x + x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -3x + x^2.$$

Теперь, казалось бы, можно сказать, что главной частью суммы $\alpha(x) + \beta(x)$ при $x \rightarrow 0$ будет $2x^2$. Но такой вывод является поспешным и поверхностным, а потому, как часто бывает, неверным.

Дело в том, что из (10.18) непосредственно следует лишь эквивалентность $\ln(1 + z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z$, т.е., согласно теореме 10.2, справедлива запись $\ln(1 + z) = z + \gamma(z)$, где $\gamma(z) \underset{z \rightarrow 0}{\equiv} o(z)$. На основании теоремы 10.3 полагаем z равным либо $3x + x^2$, либо $-3x + x^2$, и тогда

$$\begin{aligned} \ln(1 + 3x + x^2) &= 3x + x^2 + \delta_1(x), \\ \ln(1 - 3x + x^2) &= -3x + x^2 + \delta_2(x). \end{aligned}$$

Здесь $\delta_1(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} o(3x + x^2)$ и $\delta_2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} o(-3x + x^2)$. После сложения заданных б.м. функций получим

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \beta(x) &= \ln(1 + 3x + x^2) + \ln(1 - 3x + x^2) = \\ &= 2x^2 + \delta_1(x) + \delta_2(x), \end{aligned}$$

но два последних слагаемых в правой части сами могут содержать слагаемые вида Ax^2 , которые обязаны войти в главную часть суммы $\alpha(x) + \beta(x)$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому для выделения главной части суммы исходных б.м. функций преобразуем эту сумму к виду

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \beta(x) &= \ln((1 + 3x + x^2)(1 - 3x + x^2)) = \\ &= \ln(1 - 7x^2 + x^4) = -7x^2 + x^4 + \varepsilon(x), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} o(-7x^2 + x^4)$. Вот теперь вполне определенно и обоснованно можно сказать, что при $x \rightarrow 0$ главная часть этой суммы равна $-7x^2$.

10.4. Сравнение бесконечно больших функций

Для б.б. функций можно ввести классификацию, аналогичную классификации б.м. функций (см. 10.1), также связанную с пределом их частного. Пусть $v(x)$ и $w(x)$ — функции, б.б. при $x \rightarrow a$ (см. определение 7.11), где a — конечная или бесконечная точка расширенной числовой прямой.

Если существует $\lim_{x \rightarrow a} v(x)/w(x) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то в этом случае $v(x)$ и $w(x)$ называют б.б. функциями одного порядка при $x \rightarrow a$ и записывают $v(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} O(w(x))$ или $w(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} O(v(x))$. При $c = 0$ $v(x)$ называют б.б. функцией более низкого порядка роста по сравнению с $w(x)$ при $x \rightarrow a$ и записывают $v(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} o(w(x))$, а в случае бесконечного предела отношения $v(x)/w(x)$ — б.б. функцией более высокого порядка роста по сравнению с $w(x)$ при $x \rightarrow a$ и записывают $w(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} o(v(x))$ (слово „роста“ часто опускают). Наконец, если не существует ни бесконечного, ни конечного предела этого отношения, то $v(x)$ и $w(x)$ называют несравнимыми при $x \rightarrow a$ б.б. функциями.

Пример 10.9. а. Функции $2x^2$ и $x^2 + x$ являются б.б. одного порядка при $x \rightarrow \infty$, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + 1/x} = 2 \neq 0.$$

б. Функция a^x ($a > 1$) является б.б. более высокого порядка роста по сравнению с x^k ($k > 0$) при $x \rightarrow +\infty$, так как согласно (7.32)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty. \quad (10.25)$$

в. Функции $x(2 + \sin x)$ и x являются несравнимыми б.б. при $x \rightarrow \infty$, поскольку при $x \rightarrow \infty$ не существует предела отношения $x(2 + \sin x)/x = 2 + \sin x$ (ни конечного, ни бесконечного).

Определение 10.6. Функцию $v(x)$ называют **б.б. k -го порядка** относительно $w(x)$ при $x \rightarrow a$, а число k — **порядком б.б. функции $v(x)$ относительно $w(x)$** при $x \rightarrow a$, если функции $v(x)$ и $w^k(x)$ являются б.б. одного порядка при $x \rightarrow a$, т.е. если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x)}{w^k(x)} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (10.26)$$

Как и для б.м. функций, порядок k одной б.б. функции относительно другой б.б. функции может быть любым положительным числом, и если порядок функции $v(x)$ относительно $w(x)$ равен k , то порядок функции $w(x)$ относительно $v(x)$ равен $1/k$. Не всегда для б.б. функции $v(x)$, даже сравнимой со всеми степенями $w^k(x)$, можно указать определенный порядок k . Так, функция a^x ($a > 1$) сравнима при $x \rightarrow +\infty$ со всеми степенями x^k ($k > 0$), но в силу (10.25) указать порядок роста этой функции относительно x при $x \rightarrow +\infty$ нельзя.

Определение 10.7. Б.б. функции $v(x)$ и $w(x)$ при $x \rightarrow a$ называют **эквивалентными** и обозначают $v(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} w(x)$, если предел их отношения при $x \rightarrow a$ равен единице, или

$$v(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} w(x) : \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{v(x)}{w(x)} = 1. \quad (10.27)$$

Как и в случае б.м. функций, свойство эквивалентности б.б. функций симметрично и *транзитивно*.

Утверждение 10.1. Предел отношения двух б.б. функций равен пределу отношения им эквивалентных.

Если в сумме конечного числа б.б. при $x \rightarrow \infty$ функций можно указать для каждого слагаемого порядок роста k относительно x , то слагаемое высшего порядка (если оно единственно) называют **главной частью суммы б.б. при $x \rightarrow \infty$ функций**. Так, *многочлен степени n*

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

является суммой б.б. при $x \rightarrow \infty$ функций, причем порядок роста k относительно x каждого слагаемого совпадает с соответствующим *показателем степени*. Поэтому слагаемое $a_0 x^n$ высшего порядка роста ($k = n$), поскольку оно единственно, и будет главной частью этой суммы при $x \rightarrow \infty$. Аналогично, если в сумме конечного числа б.б. функций при $x \rightarrow a$ можно указать для каждого слагаемого порядок роста k относительно $1/(x - a)$, слагаемое высшего порядка будет также главной частью такой суммы при $x \rightarrow a$, если это слагаемое единственное. Например, в сумме $1/\sin^2 x + \operatorname{ctg} x$ двух б.б. функций при $x \rightarrow 0$ согласно (10.18) первое слагаемое имеет второй порядок относительно $1/x$, а второе — первый порядок. Поэтому главной частью этой суммы при $x \rightarrow 0$ будет $1/\sin^2 x$.

Утверждение 10.2. Сумма конечного числа б.б. функций эквивалентна своей главной части.

В общем случае можно говорить о главной части не только алгебраической суммы конечного числа б.б. при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$) функций, но и произвольной по структуре функции $f(x)$, эквивалентной при $x \rightarrow a$ степенной функции $A/(x - a)^k$ (при $x \rightarrow \infty$ — степенной функции Ax^k), $A \neq 0$, $k > 0$. Эта степенная функция и будет главной частью б.б. функции соответственно при $x \rightarrow a$ или при $x \rightarrow \infty$. Путь нахождения коэффициента A и показателя степени k основан на использовании определения 10.7 и утверждения 10.2 и подобен процедуре выделения главной части б.м. функции.

Пример 10.10. Функция $f(x) = \sqrt{1/x - 1}$ определена в полуинтервале $(0, 1]$ и как элементарная функция — непрерывна в этом промежутке (см. 3.6 и 9.5). Так как

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = +\infty,$$

при $x \rightarrow +0$ эта функция является б.б., а прямая $x = 0$ будет *вертикальной асимптотой* графика $f(x)$. Найдем главную

часть $f(x)$ при $x \rightarrow +0$ в виде A/x^k из условия (10.27) эквивалентности б.б. функции и ее главной части: $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)/(A/x^k) = 1$. Отсюда

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow +0} x^k \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} x^{k-1/2} \sqrt{1-x}. \end{aligned}$$

Ясно, что предел в правой части этого равенства будет конечным и отличным от нуля, если $k = 1/2$. Тогда $A = 1$, и главной частью $f(x)$ при $x \rightarrow +0$ будет $1/\sqrt{x}$ (рис. 10.1).

Поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = 0,$$

при $x \rightarrow 1-0$, $f(x)$ является б.м. функцией. Найдем главную часть $f(x)$ при $x \rightarrow 1-0$ в виде $A(1-x)^k$ из условия (10.8) эквивалентности б.м.

функции и ее главной части: $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)/(A(1-x)^k) = 1$. Отсюда

$$A = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(1-x)^k} \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(1-x)^{k-1/2} \sqrt{x}}.$$

Предел в правой части этого равенства будет конечным и отличным от нуля, если $k = 1/2$. Тогда $A = 1$, и главной частью $f(x)$ при $x \rightarrow 1-0$ будет $\sqrt{1-x}$ (см. рис. 10.1).

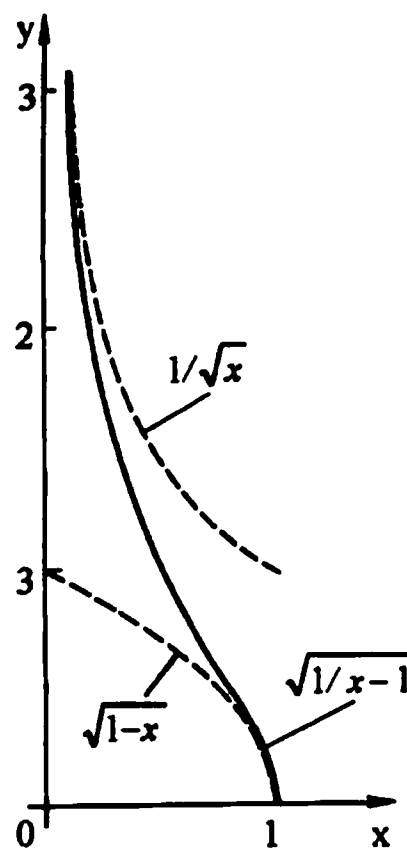


Рис. 10.1

10.5. Наклонная асимптота графика функции

Пусть главной частью б.б. при $x \rightarrow \infty$ функции $f(x)$ является Ax и, кроме того, $f(x) - Ax = b + \alpha(x)$, где $b \in \mathbb{R}$

и $\alpha(x)$ — б.м. функция при $x \rightarrow \infty$. Тогда поведение функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ хорошо описывает линейная зависимость

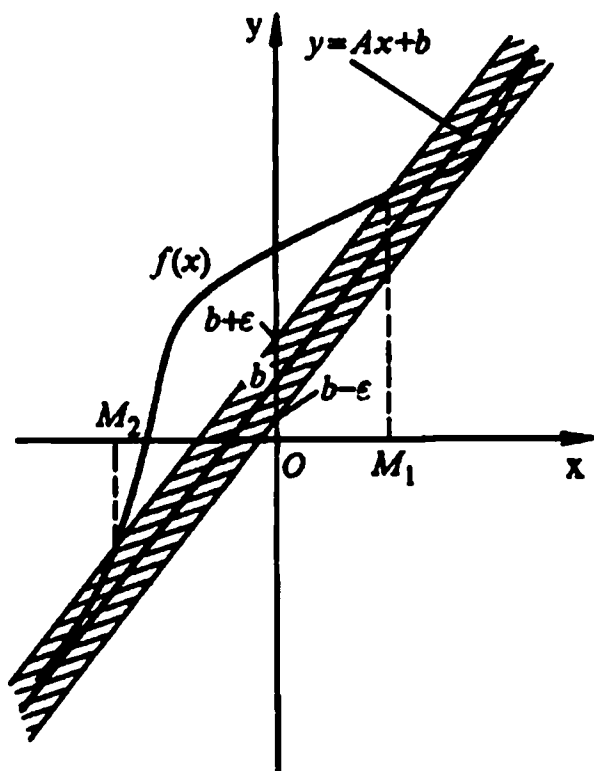


Рис. 10.2

$$y = Ax + b, \quad (10.28)$$

а график функции $f(x)$ неограниченно приближается к прямой, которая задается уравнением (10.28).

Действительно, сколь бы узкой ни была выбрана заштрихованная на рис. 10.2 полоса (иначе, сколь бы ни было мало положительное число ϵ), существует число $M > 0$, такое, что с учетом определения 7.10 при $|x| > M$ имеем $|f(x) - y| = |f(x) - Ax - b| = |\alpha(x)| < \epsilon$, т.е. при $|x| > M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$

график $f(x)$ расположен внутри этой полосы.

Определение 10.8. Прямую $y = Ax + b$ называют **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если эту функцию можно представить в виде $f(x) = Ax + b + \alpha(x)$, где $A, b \in \mathbb{R}$ и $\alpha(x)$ — б.м. функция при $x \rightarrow \infty$.

В частном случае, при $A = 0$ получаем **горизонтальную асимптоту** с уравнением $y = b$.

Теорема 10.6. Для существования у графика функции $f(x)$ асимптоты с уравнением $y = Ax + b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = A \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - Ax) = b \in \mathbb{R}. \quad (10.29)$$

◀ Необходимость условия следует из определения 10.8, так как имеем $f(x)/x = A + b/x + \alpha(x)/x$ и $f(x) - Ax = b + \alpha(x)$ и после

перехода в этих равенствах к пределу при $x \rightarrow \infty$ с учетом определения 7.10 получим (10.29). Достаточность условия докажем с использованием теоремы 7.3 о связи функции, ее конечного предела и б.м. функции. Из второго равенства (10.29) имеем $f(x) - Ax = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — функция, б.м. при $x \rightarrow \infty$, что соответствует представлению функции $f(x)$ в определении 10.8. ►

Отметим, что, строго говоря, для существования у графика функции $f(x)$ асимптоты (горизонтальной или наклонной) достаточно существования при $A \in \mathbb{R}$ лишь второго предела в (10.29). В самом деле, если он существует, то $f(x) - Ax = b + \alpha(x)$, или $f(x)/x = A + b/x + \alpha(x)/x$, и существует при $x \rightarrow \infty$ конечный первый предел в (10.29), который в частном случае может быть равен и нулю. Однако для практического нахождения коэффициентов в уравнении (10.28) асимптоты нужно использовать оба равенства (10.29), причем сначала первое, а затем (после вычисления A) — второе.

Если в (10.29) существуют пределы только при $x \rightarrow +\infty$ или только при $x \rightarrow -\infty$, то получаем *односторонние наклонные асимптоты* (*правостороннюю* или *левостороннюю*). В отличие от них наклонную асимптоту, отвечающую определению 10.8, называют *двусторонней*.

10.6. Общие рекомендации по вычислению пределов

Вычисление *пределов* является одной из основных практических задач математического анализа. Кратко систематизируем те правила и приемы вычисления *пределов функций*, которые были изложены выше, и дадим некоторые общие рекомендации.

1. Использование свойства непрерывности функции. Если под знаком предела при $x \rightarrow a$ стоит *непрерывная в точке a функция $f(x)$* , то в силу (9.1)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (10.30)$$

В этом случае важно помнить, что все элементарные функции непрерывны в своей области определения, знать свойства функций, непрерывных в точке (см. 9.2).

Пример 10.11. а. Многочлен $P_2(x) = x^2 - 4x + 3$ непрерывен в любой точке числовой прямой \mathbb{R} , и поэтому, согласно (10.30), $\lim_{x \rightarrow 5} P_2(x) = P_2(5) = 8$.

б. Для рациональной функции $f(x) = (x^4 - x^3 + x)/(x^5 + 2)$ в силу ее непрерывности в точке $x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1/3$.

в. Функция $h(x) = (x^2 + 1)^{x+2}$ непрерывна как суперпозиция непрерывных функций. Поэтому $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2) = 5^4 = 625$.

2. Использование свойств б.м. и б.б. функций. Нередко правила предельного перехода при арифметических операциях над функциями не удастся использовать непосредственно ввиду ограничений на их применение.

Пример 10.12. а. Для вычисления $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x)/x$ нельзя применить правило (7.24) вычисления предела частного, так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ не существует, а $\lim_{x \rightarrow \infty} x$ не является конечным. Но при $x \rightarrow \infty$ $1/x$ является б.м. функцией, а $\sin x$ — ограниченной. Поэтому по теореме 7.4 их произведение есть функция, б.м. при $x \rightarrow \infty$, и в силу определения 7.10 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x)/x = 0$.

б. Для вычисления

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

неприменимо правило (7.22) вычисления предела суммы, поскольку слагаемые не имеют конечного предела, являются при $x \rightarrow 1$ б.б. функциями и их сумма по свойству 4 в 7.5 есть в общем случае неопределенность. Но в данном случае

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2}$$

и искомый предел равен -1 .

3. Раскрытие неопределенностей. Неопределенности типа $0/0$ и 1^∞ встретились при рассмотрении *замечательных пределов* (см. 7.7). Возникновение неопределенностей типа ∞/∞ и $\infty - \infty$ (или $\infty + \infty$) неизбежно при вычислении в (10.29) коэффициентов уравнения (10.28) *асимптоты графика функции*. На практике возникают также неопределенности типа $0 \cdot \infty$, 0^0 и ∞^0 . Под раскрытием неопределенности понимают проведение таких тождественных преобразований, в результате которых предел можно вычислить по известным правилам. Наиболее общие правила существуют для неопределенностей типа $0/0$ и ∞/∞ , и связаны они с выделением *главной части* б.м. и б.б. функций, т.е. с заменой их более простыми *эквивалентными функциями*.

Неопределенность типа $0/0$ возникает, когда необходимо вычислить предел отношения $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$, а $f(x)$ и $g(x)$ являются при таком стремлении *аргумента* x б.м. функциями. Основная трудность раскрытия неопределенности этого типа — выделить главную часть этих функций вида $A(x-a)^k$ при $x \rightarrow a$ и вида A/x^k при $x \rightarrow \infty$ (если это вообще возможно). После замены, согласно теореме 10.4, отношения $f(x)/g(x)$ под знаком предела на отношение их главных частей и сокращения на одинаковую *степень* $x-a$ или x придем к вычислению $\lim_{x \rightarrow a} B(x-a)^l$ или $\lim_{x \rightarrow \infty} Bx^{-l}$, которые равны B , если $l = 0$, и равны 0 , если $l > 0$. При $l < 0$ эти пределы будут бесконечными.

Пример 10.13. а. Найдем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x^2 + 2x^3}{x^2 \sin^2 x - x \operatorname{arctg} x}.$$

Под знаком предела имеем отношение сумм б.м. функций при $x \rightarrow 0$. Поскольку с учетом (10.18) и определения 10.2 $x^2 \operatorname{tg} x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(2x^3)$ и $x^2 \sin^2 x \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x \operatorname{arctg} x)$, главными частями при $x \rightarrow 0$ числителя и знаменателя под знаком предела соответственно будут $2x^3$ и $-x \operatorname{arctg} x$, причем $x \operatorname{arctg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$.

В итоге получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x^2 + 2x^3}{x^2 \sin^2 x - x \operatorname{arctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3}{-x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

6. Вычислим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x + 3x^2) + \operatorname{tg} x - x^3}{1 + 2x - e^x}.$$

С учетом (10.18) $\ln(1 + 2x + 3x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x + 3x^2$. Так как $x^2 = o(x)$, то $2x + 3x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$. В силу транзитивности свойства эквивалентности получаем $\ln(1 + 2x + 3x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2x$. Поскольку $\operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ и $x^3 = o(x)$, главной частью числителя при $x \rightarrow 0$ будет $2x + x = 3x$. Так как из (10.18) $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, главной частью знаменателя $1 + 2x - e^x = 2x - (e^x - 1)$ при $x \rightarrow 0$ будет $2x - x = x$. В итоге найдем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x + 3x^2) + \operatorname{tg} x - x^3}{1 + 2x - e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3. \quad \#$$

Неопределенность типа ∞/∞ также можно раскрыть выделением главных частей, но теперь уже б.б. функций, или же, опираясь на теорему 7.5 о связи б.б. и б.м. функций, привести эту неопределенность к типу $0/0$.

При вычислении предела разности $f(x) - g(x)$ при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$, когда $f(x)$ и $g(x)$ при таком стремлении аргумента x являются б.б. функциями, возникает неопределенность типа $\infty - \infty$. В зависимости от удобства последующих вычислений тождественным преобразованием

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{1}{1/f(x)} - \frac{1}{1/g(x)} = \\ &= \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x)g(x))} = \frac{f(x)g(x)}{1/(1/g(x) - 1/f(x))} \end{aligned}$$

эту неопределенность можно привести к типу $0/0$ или ∞/∞ . Отметим, что в некоторых случаях освободиться от неопределенности типа $\infty - \infty$ в иррациональных выражениях можно путем переноса иррациональности в знаменатель.

Если при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$ $f(x)$ — б.м. функция, а $g(x)$ — б.б. функция, то вычисление предела произведения $f(x)g(x)$ при указанном стремлении аргумента x связано с раскрытием неопределенности типа $0 \cdot \infty$. Тождественным преобразованием

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)} \quad (10.31)$$

ее можно свести к типу $0/0$ или ∞/∞ .

Неопределенность типа 1^∞ возникает при вычислении предела *показательно-степенной функции* (см. пример 9.7) $u(x)v(x)$ при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$, когда при таком стремлении аргумента x $u(x) \rightarrow 1$, а $v(x)$ является б.б. функцией. Из (9.18) имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x) \right). \quad (10.32)$$

Отсюда следует, что неопределенность типа 1^∞ можно раскрыть вычислением предела произведения $v(x) \ln u(x)$, что, в свою очередь, связано с раскрытием неопределенности типа $\infty \cdot 0$, поскольку при $u(x) \rightarrow 1$ $\ln u(x) \rightarrow 0$. С учетом (10.20) и теоремы 10.4 при вычислении предела (10.32) $\ln u(x)$ можно заменить выражением $u(x) - 1$.

Неопределенность типа 0^0 также возникает при вычислении предела функции $(u(x))^{v(x)}$, но когда при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$ $u(x)$ и $v(x)$ являются б.м. функциями. Тогда при $u(x) \rightarrow 0$ $\ln u(x) \rightarrow -\infty$ и вычисление предела в (10.32) связано с раскрытием неопределенности типа $0 \cdot \infty$.

К аналогичной ситуации приводит неопределенность ∞^0 , возникающая при вычислении предела функции $u(x)^{v(x)}$, когда при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$ $u(x)$ и $v(x)$ являются соответственно

5.6. и б.м. функциями. Теперь при $u(x) \rightarrow \infty$ $\ln u(x) \rightarrow \infty$, и снова приходим к неопределенности типа $0 \cdot \infty$.

Таким образом, все рассмотренные типы неопределенностей тождественными преобразованиями могут быть сведены к двум основным типам: $0/0$ и ∞/∞ (и даже одному типу $0/0$).

Пример 10.14. Для вычисления предела $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$, связанного с раскрытием неопределенности типа 1^∞ , используем (10.32), положив $u(x) = 2-x$ и $v(x) = \operatorname{tg}(\pi x/2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x) \right).$$

Чтобы найти предел в показателе экспоненты, т.е. раскрыть неопределенность типа $\infty \cdot 0$, проведем замену переменных и элементарные преобразования *тригонометрических функций* с последующей заменой отношения б.м. функций им эквивалентными согласно (10.18) и теореме 10.4:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(2-x) &= \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ t \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{tg} \pi \frac{t+1}{2} \cdot \ln(1-t) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2} \right) \ln(1-t) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1-t)}{\operatorname{tg}(\pi x/2)} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{\pi t/2} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

В итоге $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)} = e^{2/\pi}$.

Тот же результат следует и из (9.19), если при помощи такой же замены переменных, учитывая (10.18) и теорему 10.4, предварительно вычислить

$$\begin{aligned} p &= \lim_{x \rightarrow 1} v(x)(u(x)-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \cdot (1-x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\operatorname{ctg} \pi \frac{x-1}{2} \right) (1-x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg}(\pi t/2)} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Однако не всегда для раскрытия неопределенности типа 1^∞ необходимо предварительно раскрывать неопределенность

типа $\infty \cdot 0$, чтобы затем применить (10.32) или (9.19). В некоторых случаях показательно-степенную функцию, стоящую под знаком предела, удастся преобразовать к такому виду, что и основание степени $u(x)$ и показатель степени $v(x)$ будут иметь конечные пределы (см. (9.16)). Тогда можно непосредственно использовать (9.18). Например, при вычислении $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$ положим $u(x) = (1 + \sin x)^{1/\sin x}$ и $v(x) = \cos x$, так что с учетом второго замечательного предела в виде (7.42)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \sin x)^{1/\sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ t \xrightarrow{x \rightarrow \pi} 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e,$$

а в силу непрерывности функции $\cos x$ $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$. Таким образом, применительно к (9.18) имеем $b = e$ и $c = -1$, т.е. искомый предел равен $b^c = e^{-1} = 1/e$.

Пример 10.15. Пусть $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ и $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$ — многочлены степени n и m соответственно ($n, m \in \mathbb{N}$), т.е. $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. При $x \rightarrow \infty$ $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ являются б.б. функциями, а для их отношения

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} \frac{a_0 + a_1/x + \dots + a_n/x^n}{b_0 + b_1/x + \dots + b_m/x^m} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < m, \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{при } n = m, \\ \infty & \text{при } n > m. \end{cases} \quad (10.33) \end{aligned}$$

В случае $n > m$ для $n - m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) в (10.33) получим $+\infty$, а для $n - m = 2k - 1$ при $x \rightarrow +\infty$ будет $+\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ будет $-\infty$. При $n - m = 1$ график этого отношения имеет наклонную асимптоту с коэффициентами

$$A = \frac{a_0}{b_0} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - Ax \right) = a_1 - a_0 \frac{b_1}{b_0}$$

в уравнении (10.28), которые нетрудно найти из (10.29). Ясно, что при $n = m$ $f(x)_{x \rightarrow \infty} \sim O(g(x))$ и $b_0 f(x)_{x \rightarrow \infty} \sim a_0 g(x)$.

Если $P_n(a) = 0$ и $Q_m(a) = 0$, то при вычислении предела их отношения при $x \rightarrow a$ приходим к неопределенности типа $0/0$. В этом случае многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ можно представить в виде (см. 4.4)

$$P_n(x) = (x - a)^r T_1(x), \quad Q_m(x) = (x - a)^q T_2(x),$$

где $T_i(x)$ — некоторые многочлены и $T_i(a) \neq 0$ ($i = 1, 2$). В итоге получаем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)^{r-q} \frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \begin{cases} 0 & \text{при } r > q, \\ \frac{T_1(a)}{T_2(a)} & \text{при } r = q, \\ \infty & \text{при } r < q. \end{cases}$$

Дополнение 10.1. Асимптотические многочлены

К понятию прямолинейной асимптоты графика функции примыкает понятие, которое вводится согласно следующему определению.

Определение 10.9. Многочлен $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ при $x \rightarrow +\infty$ именуют *асимптотическим* для функции $f(x)$, определенной в окрестности бесконечной точки $+\infty$ расширенной числовой прямой, если

$$f(x) = P_n(x) + \alpha(x), \quad (10.34)$$

где $\alpha(x)$ — б.м. функция при $x \rightarrow +\infty$.

Ясно, что аналогичное определение можно дать и при $x \rightarrow -\infty$. Геометрически условие (10.34) означает, что при $x \rightarrow +\infty$ графики функции $f(x)$ и асимптотического многочлена $P_n(x)$ неограниченно сближаются. Алгоритм нахождения коэффициентов такого многочлена устанавливает следующая теорема.

Теорема 10.7. Многочлен $P_n(x)$ является асимптотическим для функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда при $x \rightarrow +\infty$ существует $n+1$ конечных пределов, определяющих коэффициенты многочлена:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^n} &= a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - a_0 x^n}{x^{n-1}} &= a_1 \in \mathbb{R}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2)}{x} &= a_{n-1} \in \mathbb{R}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x)) &= a_n \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◀ Если многочлен $P_n(x)$ является асимптотическим для $f(x)$ и верно (10.34), то почленным делением (10.34) на x^n и переходом к пределу при $x \rightarrow +\infty$ устанавливаем существование первого из указанных пределов и равенство его коэффициенту a_0 , а затем аналогичным путем последовательным делением на x^{n-1}, \dots, x устанавливаем существование всех, кроме последнего, пределов и их равенство соответственно коэффициентам a_1, \dots, a_{n-1} . Существование последнего предела и равенство его коэффициенту a_n следует непосредственно из (10.34) в силу теоремы 7.3 о связи функции, ее предела и б.м. функции.

Обратно, если существуют все указанные конечные пределы, причем $a_0 \neq 0$, то, согласно теореме 7.3, из последнего предела получаем

$$f(x) - (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x) = a_n + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — б.м. функция при $x \rightarrow +\infty$, что отвечает условию (10.34). ►

Определение 10.9 обобщает понятия *наклонной* и *горизонтальной асимптот*, поскольку $P_1(x) = a_0 x + a_1$ и $P_0(x) = a_0$, $a_0 \neq 0$. Отметим, что нахождение каждого слагаемого асимптотического многочлена, по существу, соответствует выделению главной части сначала функции $f(x)$, затем разности

$f(x) - a_0x^n$ и т. д. Если для сложной функции удастся найти такой многочлен, то это обычно облегчает анализ ее поведения при $x \rightarrow \infty$, так как построение графика и исследование многочлена проще, чем самой функции.

Пример 10.16. Пусть $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x$. Проверим, существует ли для $f(x)$ асимптотический полином при $x \rightarrow +\infty$. Ясно, что отличный от нуля конечный $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x^n$ будет при $n = 2$. Вычислим

$$a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x} \right) = 1.$$

Затем найдем

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - a_0x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} - 1 - x \right).$$

Для раскрытия неопределенности типа $\infty - \infty$ перенесем иррациональность под знаком последнего предела в знаменатель:

$$\frac{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} - (1 + x)^2}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} + 1 + x} = \frac{-2x + \frac{1}{x^2}}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \frac{1}{x} + 1 \right)}.$$

Отсюда ясно, что при $x \rightarrow +\infty$ $a_1 = -1$. Наконец, вычислим

$$a_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (a_0x^2 + a_1x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2 \right).$$

Снова перенесем иррациональность в знаменатель:

$$\frac{x^4 + x^2 + 1 - x^4}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1} + x^2} = \frac{1 + 1/x^2}{\sqrt{1 + 1/x^2 + 1/x^4} + 1}.$$

Теперь нетрудно установить, что при $x \rightarrow +\infty$ $a_2 = 1/2$. В итоге асимптотическим многочленом для данной функции будет $P_2(x) = x^2 - x + 1/2$.

Дополнение 10.2. Об использовании символов O и o

В математической литературе символы O и o , называемые по имени немецкого математика Э.Г.Г. Ландау (1877–1938) *символами Ландау*, используют при сравнении не только б.м. и б.б. функций. Для произвольных функций запись

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(g(x)) \quad (10.35)$$

означает существование такой *проколотой окрестности* $\mathring{U}(a)$ точки a и такой константы $C > 0$, что для определенных в $\mathring{U}(a)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in \mathring{U}(a). \quad (10.36)$$

В этом случае функцию $f(x)$ называют *ограниченной по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$* . В частном случае $g(x) \equiv 1$ $\forall x \in \mathring{U}(a)$ из (10.36) получим условие *ограниченности функции* (см. 3.4) $f(x)$ в $\mathring{U}(a)$, которому соответствует обозначение $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(1)$.

Отметим, что в (10.36) возможно $g(x) = 0$ только для тех точек $x \in \mathring{U}(a)$, для которых и $f(x) = 0$, тогда как $f(x) = 0$ допустимо в любой точке $x \in \mathring{U}(a)$. Поэтому из (10.35) не следует обратного соотношения

$$g(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(f(x)), \quad (10.37)$$

т.е. в общем случае символ O в смысле (10.35) не обладает свойством симметрии.

Если существует такая $\mathring{U}_*(a)$, в которой $g(x) \neq 0$, то из (10.35) следует $f(x)/g(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(1)$, т.е. в $\mathring{U}_*(a)$ ограничено отношение $f(x)/g(x)$. Аналогично из (10.37) имеем

$g(x)/f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(1)$, если существует $\overset{\circ}{U}_{**}(a)$, такая, что $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{**}(a)$. Если же имеют место и (10.35), и (10.37), то $f(x)$ и $g(x)$ называют **функциями одного порядка** при $x \rightarrow a$.

Достаточным условием указанных свойств является существование при $x \rightarrow a$ **конечного** отличного от нуля **предела** отношения $f(x)/g(x)$ (или $g(x)/f(x)$). В самом деле, пусть $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = c \neq 0$. Тогда в силу теоремы 7.3 о связи функции, ее предела и б.м. функции

$$\exists \overset{\circ}{U}_1(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_1(a) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = c + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — функция, б.м. при $x \rightarrow a$. Из определения 7.10 б.м. функции следует, что $\alpha(x)$ ограничена при $x \rightarrow a$, т.е.

$$\exists \overset{\circ}{U}_2(a) \wedge (\varepsilon > 0) : |\alpha(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}_2(a).$$

В итоге с учетом (1.4)

$$\forall x \in \overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}_1(a) \cap \overset{\circ}{U}_2(a) \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = |c + \alpha(x)| < |c| + \varepsilon,$$

т.е. $f(x)/g(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(1)$. Кроме того, в $\overset{\circ}{U}(a)$ $g(x) \neq 0$ и поэтому $|f(x)| < (|c| + \varepsilon)|g(x)|$, т.е. справедливо (10.36) и (10.35). Согласно свойству 3 (см. 7.4) сохранения функцией знака своего предела $\exists \overset{\circ}{U}_3(a) : \forall x \in \overset{\circ}{U}_3(a) \quad f(x)/g(x) \neq 0$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{U}_3(a)$ $g(x)/f(x) = 1/(c + \alpha(x))$ и $\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x)/f(x) = 1/c \neq 0$. Отсюда аналогичным путем можно показать, что $g(x)/f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} O(1)$ и верно (10.37).

Итак, (10.1) определяет символ O в более узком смысле, чем условие (10.36), но не противоречит ему. Из (10.36) следуют некоторые очевидные свойства этого символа, при записи которых опустим обозначение аргумента x у функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ и $p(x)$, определенных в некоторой окрестности

точки a , и не будем сопровождать равенства указанием, что $x \rightarrow a$:

$$\begin{aligned} f = O(g) \wedge g = O(h) &\Rightarrow f = O(O(h)) = O(h); \\ f = O(g) \wedge h = O(p) &\Rightarrow fh = O(g)O(p) = O(gp); \\ f = O(g) \wedge (c \neq 0) &\Rightarrow cf = O(cg) = |c|O(g) = O(g); \\ f = O(g) \wedge h = O(g) &\Rightarrow |f+h| \leq |f| + |h| = O(g) + O(g) = O(g). \end{aligned}$$

Характерная особенность этих свойств в том, что символ O может стоять как в правой, так и в левой части равенства. Более того, имеют смысл равенства вида $f + O(g) = h + O(p)$, но читать их принято лишь слева направо, хотя не исключено, что они могут остаться верными и при чтении в обратном направлении.

В случае произвольных функций запись

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(g(x)) \quad (10.38)$$

означает существование для любого $\varepsilon > 0$ такой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a , что для определенных в $\overset{\circ}{U}(a)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}(a), \quad (10.39)$$

причем функцию $f(x)$ называют **б.м. по сравнению с $g(x)$** при $x \rightarrow a$. В частном случае, когда $g(x) \equiv 1$ при $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, из (10.39) получим условие определения 7.10 б.м. функции при $x \rightarrow a$, которому соответствует обозначение $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\equiv} o(1)$.

Если существует такая $\overset{\circ}{U}^*(a)$, в которой $g(x) \neq 0$, то условию (10.39) равносильно существование нулевого предела отношения $f(x)/g(x)$ при $x \rightarrow a$, т.е. (10.3) определяет символ o также в более узком смысле, чем условие (10.39), но тоже не противоречит ему.

Сохраняя принятые выше упрощения в записи, приведем вытекающие из (10.36) и (10.39) свойства символов O и o :

$$f = o(g) \Rightarrow f = O(g):$$

$$f = o(g) \wedge g = o(h) \Rightarrow f = o(o(h)) = o(h);$$

$$f = o(g) \wedge h = o(p) \Rightarrow fh = o(g) o(p) = o(gp);$$

$$f = o(g) \wedge (c \neq 0) \Rightarrow cf = o(cg) = |c|o(g) = o(g);$$

$$f = o(g) \wedge h = o(g) \Rightarrow |f+h| \leq |f| + |h| = o(g) + o(g) = o(g);$$

$$f = o(g) \wedge h = O(g) \Rightarrow |f+h| \leq |f| + |h| = o(g) + O(g) = O(g);$$

$$f = o(g) \wedge g = O(h) \Rightarrow f = o(O(h)) = o(h);$$

$$f = O(g) \wedge g = o(h) \Rightarrow f = O(o(h)) = o(h).$$

К этим свойствам относятся те же замечания, что и к свойствам символа O . Отметим, что в математической литературе произвольные функции f и g , определенные в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки a и удовлетворяющие условию $f - g = o(g) = o(f)$, называют **эквивалентными** при $x \rightarrow a$, вкладывая в это понятие более широкий смысл, нежели это связано с определениями 10.5 и 10.7 эквивалентных при $x \rightarrow a$ соответственно б.м. и б.б. функций.

Вопросы и задачи

10.1. Привести примеры б.м. и б.б. функций при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow \infty$.

10.2. Пусть $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} o(g(x))$ и $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} O(h(x))$. Доказать, что $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\asymp} o(h(x))$.

10.3. Найти порядок малости относительно $x - a$ при $x \rightarrow a$ и выделить главную часть вида $A(x - a)^k$ функций:

а) $x \sin x - x^2 \operatorname{tg} x$, $\arcsin \sqrt[3]{x} + \ln(1+x)$, $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$, $2x - 3x^3 + x^5$, $\sqrt{x} + \sin x$, $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ при $a=0$;

б) $1 - \sin x$ и $\cos^2 x$ при $a=\pi/2$;

в) $x^3 - 1$, $e^x - e$, $x^3 - 3x + 2$, $\sqrt{x^2 - 1}$, $\ln x$, $\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}$ при $a=1$.

10.4. Установить порядок малости относительно $1/x$ при $x \rightarrow \infty$ и выделить главную часть вида A/x^k функций:

$$\frac{2x+1}{x\sqrt{x+2}}; \quad \frac{x+1}{x^4+1}; \quad \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}; \quad \frac{1}{x \sin x}; \quad \sqrt{1+x} - \sqrt{x};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}}; \quad \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}; \quad \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}.$$

10.5. Доказать, что $x^{1/x} \underset{x \rightarrow +0}{\sim} o(x^n)$ при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$. Построить функцию более высокого порядка малости при $x \rightarrow +0$ по сравнению с $x^{1/x}$.

10.6. Привести примеры несравнимых б.м. функций при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$ и $x \rightarrow \infty$.

10.7. Привести пример аналитически заданной функции, которая одновременно является б.м. при $x \rightarrow 1$ и $x \rightarrow 2$ и б.б. при $x \rightarrow 3$ и $x \rightarrow 4$.

10.8. Привести примеры б.б. функций при $x \rightarrow a$, предел отношения которых при $x \rightarrow a$ равен: 1; $1+0$; 0; -0 ; $-\infty$; ∞ ; не существует.

10.9. Установить порядок роста относительно x при $x \rightarrow \infty$ и выделить главную часть вида Ax^k функций:

$$x^3 + \sin x; \quad x^2 + 100x + 10000; \quad \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x};$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x} + 1}; \quad \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1}; \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

10.10. Найти порядок роста относительно $1/(x-a)$ при $x \rightarrow a$ и выделить главную часть вида $A/(x-a)^k$ функций:

а) $\frac{1}{1 - \sin x}$ при $a = \frac{\pi}{2}$;

б) $\frac{1}{1 - x^2}$, $\frac{x^2}{x^2 - 1}$, $\frac{1}{\sin \pi x}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$, $\frac{x}{\sqrt[3]{1 - x^4}}$,

$\frac{\ln x}{(1-x)^2}$, $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ при $a = 1$.

10.11. Доказать утверждения 10.1 и 10.2.

10.12. Найти пределы отношений $(\operatorname{sh} x)/x$ и $(\operatorname{th} x)/x$ при $x \rightarrow 0$.

10.13. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+3}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + x^2}{xe^x + \ln(1 + 3x + \sin^2 x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x).$$

10.14. Может ли график функции иметь две разные асимптоты при $x \rightarrow +\infty$?

10.15. Установить, сверху или снизу приближается график к наклонной асимптоте при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ для функций:

$$\frac{x^2+1}{x}; \quad \frac{x^3+1}{x^2}; \quad \frac{(x+1)^3}{(x+2)^2}; \quad \frac{x^2}{|x+1|}; \quad \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}; \quad \frac{x^2+2\sin x}{x}.$$

10.16. Найти, при каких $n, m \in \mathbb{N}$ имеет асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ функция

$$f(x) = \left(\frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} \right)^{1/k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

10.17. Для функции $\sqrt{x^2+4x+5}-2$ найти асимптоты и построить ее график.

10.18. Для функции $\sqrt{x^6-1}$ найти главные части при $x \rightarrow \pm 1$ и $x \rightarrow \infty$, построить графики функции и найденных главных частей.

10.19. Для функции $(x^2-3x)/(x-1)$ найти все асимптоты, главные части при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$ и $x \rightarrow 3$, построить графики функции и найденных главных частей.

10.20. Для функции $x^2/\sqrt{|x^2-1|}$ найти все асимптоты, главные части при $x \rightarrow \pm 1$ и $x \rightarrow 0$, построить графики функции и найденных главных частей.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники и учебные пособия

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. для втузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1984. 432 с.

Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ / Пер. с франц. *Е.И. Стечкиной*. М.: Наука, 1974. 488 с.

Зорич В.А. Математический анализ: Учеб. для студентов университетов, обучающихся по специальностям „Математика“ и „Механика“: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1981. 544 с.; Т. 2. М.: Наука, 1984. 640 с.

Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: Начальный курс / Под ред. *А.Н. Тихонова*. 2-е изд., перераб. М.: Изд-во МГУ, 1985. 662 с.

Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2 т. Т. 1. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982. 616 с.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т. 2-е изд., перераб. и доп. Т. 1. М.: Высш. шк., 1988. 712 с.; Т. 3. М.: Высш. шк., 1989. 352 с.

Математический анализ / *И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда*: Учеб. для студентов математических специальностей университетов: В 3 т. Т. 1. Киев: Вища школа, 1983. 496 с.

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969. 640 с.

Пизо Ш., Заманский М. Курс математики: Алгебра и анализ / Пер. с франц. *Е.И. Стечкиной*. М.: Наука, 1971. 656 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. пособ. для втузов: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1985. 432 с.

Уваров В.Б. Математический анализ: Учеб. пособ. для вузов. М.: Высш. шк., 1984. 288 с.

Фиттенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учеб. пособ. для вузов: В 3 т. Т. 1. 6-е изд., стереотип. М.: Наука, 1966. 608 с.

Хавин В.П. Основы математического анализа: Учеб. пособ. для вузов: В 3 т. Т. 1. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 448 с.

Шварц Л. Анализ / Пер. с франц. под ред. С.Г. Крейна: В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1972. 824 с.

Шерстнёв А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1993. 302 с.

Шилов Г.Е. Математический анализ: Функции одного переменного: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1969. 528 с.

Справочные издания

Александрова Н.В. Математические термины: Справочник. М.: Высш. шк., 1978. 190 с.

Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 544 с.

Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы / Под ред. Ю.С. Богданова. Минск: Вышэйш. шк., 1984. 528 с.

Герасимович А.И., Рысюк Н.А. Математический анализ: Справочное пособие для студентов втузов и инженеров: В 2 т. Т. 1. Минск: Вышэйш. шк., 1989. 288 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие для преподавателей математики, инженерно-технических работников и студентов. Киев: Вища шк., 1985. 528 с.

Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Сов. энцикл., 1988. 848 с.

Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. 2-е изд., стереотип. Киев: Техніка, 1977. 768 с.

Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика / Пер. с франц. под ред. А.Н. Колмогорова. М.: Мир, 1966. 272 с.

Задачники

Богданов Ю.С., Кастрица О.А. Начала анализа в задачах и упражнениях. Минск: Вышэйш. шк., 1988. 176 с.

Виноградова И.А., Олезник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под общ. ред. В.А. Садовниченко. М.: Изд-во МГУ, 1988. 416 с.

Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 т. Т.1. 4-е изд., испр. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 304 с.

Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 9-е изд., стереотип. М.: Наука, 1977. 528 с.

Дороговцев А.Я. Математический анализ: Сборник задач. Киев: Вища шк., 1987. 408 с.

Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов¹ / Под ред. *Б.П. Демидовича*. 7-е изд., стереотип. М.: Наука, 1970. 472 с.

Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. 3-е изд. Харьков: Изд-во ХГУ, 1967. 946 с.

Лефор Г. Алгебра и анализ: Задачи / Пер. с франц. *Е.И. Стечкиной*. М.: Наука, 1973. 464 с.

Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах: Функции одной переменной. М.: Наука, 1970. 400 с.

Математический анализ в вопросах и задачах / Под ред. *В.Ф. Бутузова*. М.: Высш. шк., 1984. 200 с.

Математический анализ в примерах и задачах: В 2 т. Т.1. Введение в анализ, производная, интеграл / *И.И. Ляшко, А.К. Болрчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач*. Киев: Вища шк., 1974. 680 с.

Мизайленко В.М., Антонюк Р.А. Сборник прикладных задач по высшей математике. Киев: Вища шк., 1990. 168 с.

Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций. М.: Просвещение, 1981. 272 с.

Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во МГУ, 1987. 311 с.

Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978. 208 с.

Сборник задач по алгебре / Под ред. *А.И. Кострикина*. М.: Наука, 1987. 352 с.

Сборник задач по математике для втузов: Линейная алгебра и основы математического анализа / Под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*: В 3 т. Т.1. М.: Наука, 1981. 484 с.

Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Под ред. *Л.Д. Кудрявцева*. М.: Наука, 1984. 592 с.

¹ Отражен опыт преподавания высшей математики в МВТУ им. Н.Э. Баумана.

Научно-популярные книги

Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975. 208 с.

Гусак Г.М., Гусак Е.А. Функции и пределы. Минск: Вышэйш. шк., 1987. 208 с.

Деменчук В.В. На пороге алгебры. Минск: Вышэйш. шк., 1987. 144 с.

Дужин С.В., Чеботаревский Б.Д. От орнаментов до дифференциальных уравнений. Популярное введение в теорию групп преобразований. Минск: Вышэйш. шк., 1988. 256 с.

Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2 т. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ / Пер. с нем. под ред. В.Г. Болтянского. 4-е изд. М.: Наука, 1987. 432 с.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов / Пер. с англ. под ред. В.Л. Гончарова. М.: Просвещение, 1967. 664 с.

Попов Ю.П., Пузначев Ю.В. Математика в образах. М.: Знание, 1989. 208 с.

Стюарт Я. Концепции современной математики / Пер. с англ. Н.И. Плужниковой и Г.М. Цукерман. Минск: Вышэйш. шк., 1980. 382 с.

Тарасов Л.В. Математический анализ: Беседы об основных понятиях. М.: Просвещение, 1979. 144 с.

Книги по истории развития математики

Вейль Г. Математическое мышление / Пер. с англ. и нем. под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. М.: Наука, 1989. 400 с.

Даан-Дальмедико А., Пейфффер Ж. Пути и лабиринты: Очерки по истории математики / Пер. с франц. под ред. И.Г. Башмаковой. М.: Мир, 1986. 432 с.

Клайн М. Математика. Поиск истины / Пер. с англ. под ред. Ю.В. Сачкова и В.И. Аршинова. М.: Мир, 1988. 296 с.

Клайн М. Математика. Утрата определенности / Пер. с англ. под ред. И.М. Яглома. М.: Мир, 1984. 447 с.

Рыбников К.А. Возникновение и развитие математической науки. М.: Просвещение, 1987. 160 с.

Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики / Пер. с нем. И.Б. Погребысского. 3-е изд. М.: Наука, 1978. 336 с.

Фрейман Л.С. Творцы высшей математики. М.: Наука, 1968. 216 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсцисса точки** 78
Аксиома 50
Алгебра булева 59
Алгоритм (схема) Горнера 158
– итерационный 100
Аргумент комплексного числа 150
– функции 70, 106
Арккосинус 129
Арккотангенс 129
Арсинус 129
Арктангенс 129
Асимптота графика функции
 вертикальная 256
– горизонтальная двусторонняя 255
– – правосторонняя 254
– наклонная 376
– – двусторонняя 377
– – левосторонняя 377
– – односторонняя 377
– – правосторонняя 377
Асимптотика функции 355
Ассоциативность 45
- Биекция** 74
– обратная 75
Бином 86, 132
– Ньютона 86
- Величина** 215
– переменная 215
– постоянная 215
– скалярная 215
- Ветвь однозначная многозначной функции** 114
Внутренность множества 185
Высказывание 57
- Гипербола** 107
Граница множества
 (подмножества) 185
– – верхняя 87
– – нижняя 88
Грань точная верхняя 88
– – нижняя 89
График отображения (функции) 80
– функции 80, 106
Группа 144
– подстановок n -й степени 166
– симметрий фигуры 170
- Делитель многочлена** 157
Диаметр множества 183
Дизъюнкция 58
Дистрибутивность 46
Доказательство 61
– от противного 62
Дополнение 54
Дробь рациональная 133
– – правильная (неправильная) 133
Дуга (путь) 202
- Единица** 45
– мнимая 149
 ε -окрестность точки 52, 179
- Заключение теоремы** 60

Закон композиции аддитивный 143

-- ассоциативный 138

-- бинарный внутренний 138

-- дистрибутивный 142

-- индуцированный 143

-- коммутативный 139

-- мультипликативный 144

Законы де Моргана 55

Значение абсолютное (модуль) 48

- аргумента главное 150

- величины 215

- функции в точке 70, 106

-- наибольшее 201

-- наименьшее 201

Идемпотентность 55

Импликация 58

Инверсия в перестановке 166

Интервал 47

- бесконечный 51

Инъекция 74, 119

Квантор общности 58

- существования 58

Кольцо 144

- многочленов 157

Комбинаторика 83

Комбинация линейная 226

Коммутативность 45

Компакт 189

Композиция (суперпозиция)

отображений (функций) 76

- подстановок 165

- элементов 138

Константа 215

Конъюнкция 58

Координаты точки 46, 78

-- полярные 151

Корень уравнения 345

Кортеж 79

Косинус 128

- гиперболический 291

Котангенс 128

- гиперболический 291

Коэффициенты биномиальные 86

- многочлена 132

Кратность нуля 159

Критерий 232

- Коши существования конечного
предела функции 270

Круги Эйлера 63

Логарифм натуральный 288

Локус Аньези 125

Мажоранта 87

Метод Больцано 245

- деления отрезка 346

- итераций 100

- линейного интерполирования 348

- ложного положения корня 348

- математической индукции 63

- последовательных приближений 100

- пропорциональных частей 348

- хорд 348

Метрика 177

- дискретная 179

- евклидова (естественная) 179

Миноранта 88

Многочлен (полином) 132

- асимптотический 384

- над полем действительных чисел 156

Множества равномошные

(эквивалентные) 92

Множество 41

- действительных чисел 49

--- пополненное (расширенное) 50

- комплексных чисел 149

Множество натуральных чисел 50

– (подмножество) бесконечное 43

-- замкнутое 186

-- компактное 189

-- конечное 43

-- несчетное 96

-- ограниченное 183, 184

--- сверху 87

--- снизу 88

-- открытое 181

-- пустое 43

-- счетное 93

-- упорядоченное 82

--- частично 82

– рациональных чисел 51

– универсальное 52

– целых чисел 50

Модуль 48

– комплексного числа 150

Мощность гиперконтинуума 98

– континуума 97

– множества 92

Начало координат 77

Неопределенность 240

Неравенство треугольника 152, 177

n-ка 79

Нуль 45

– многочлена 159

-- кратный (простой) 159

– функции 345

Область значений (изменения)
переменной 216

-- функции 70, 106

– определения (существования)
функции 70, 106

Образ множества (подмножества)
при отображении 70

Образ элемента при отображении 70

Объединение подмножеств
(множеств) 53

Окрестность точки 51, 182

-- проколота 251

Ордината точки 78

Ось координатная 46

-- действительная 150

-- мнимая 150

Отделение корней уравнения 346

Отношение порядка 82

-- естественное 82

Отображение (функция) 70

– биективное 74

– множества на себя 75

– непрерывное в точке 191, 303

-- на множестве 192

– обратное 75

– разрывное 191

– сжимающее 315

– тождественное 77

Отображения взаимно обратные 75

Отрезок 47

– вложенный в отрезок 47

Отрицание высказывания 58

Оценка асимптотическая 357

Пара упорядоченная 78

Парабола 107

Параметр 115

Переменное зависимое 70

– промежуточное 117

Пересечение подмножеств
(множеств) 53

Перестановка 83

– четная (нечетная) 166

Пересчет элементов множества 93

Период функции 121

- Плоскость комплексная
 (комплексных чисел) 150
- Поведение функции
 асимптотическое 355
- Подмножества (множества)
 непересекающиеся 54
- Подмножество 43
 – замкнутое (устойчивое) 142
 – ограниченное 88
 – собственное 43
- Подпокрытие покрытия множества
 188
- Подпоследовательность 243
- Подстановка n чисел (n -й
 степени) 164
 – обратная 166
 – тождественная n -й степени 165
 – четная (нечетная) 168
- Показатель степени 126
- Покрытие множества 188
 – конечное 188
 – открытое 188
- Поле 144
 – (множество) комплексных чисел
 149
- Полином (многочлен) 132
- Полугруппа 144
- Полуинтервал 47
 – бесконечный 51
- Полуокрестность точки 260
 – верхняя (нижняя) 262
 – проколота левая (правая) 260
- Порядок бесконечно большой
 функции 373
 – малости бесконечно малой
 функции 358
- Последовательность 71, 217
 – бесконечно большая 237
- Последовательность бесконечно
 малая 236
 – возрастающая (убывающая) 218
 – итерационная 100
 – Коши (фундаментальная) 247
 – монотонная (строго монотонная)
 218
 – невозрастающая (неубывающая)
 218
 – неограниченная 219
 – обратная 224
 – ограниченная 219
 – постоянная 217
 – расходящаяся 238
 – стремящаяся к бесконечному
 пределу 237
 – сходящаяся к точке 220
 – фундаментальная 232, 314
 – числовая 71, 216
 – конечная (бесконечная) 217
 – элементов множества 71
- Предел замечательный второй 285
 – первый 284
 – отображения в точке по
 множеству 295, 301
 – последовательности 220, 299
 – бесконечный 237
 – конечный 238
 – функции в точке 251, 252, 267
 – бесконечный 257
 – двусторонний 260
 – конечный 257
 – левый (левосторонний) 260
 – односторонний 260
 – правый (правосторонний) 260
 – при стремлении аргумента к
 бесконечности 254
- Преобразование 75

Признак Вейерштрасса сходимости
ограниченной монотонной
последовательности 231

Принцип вложенных отрезков
(принцип Кантора) 47

– двойственности (дуальности) 56

Приращение аргумента в точке 326

– функции в точке 326

Продолжение отображения
(функции) 73

Произведение действительных
чисел 45

– комплексных чисел 152

– множеств 78

– множеств прямое (декартово) 78

– последовательностей 224

Промежуток 47

– замкнутый (открытый) 47

Прообраз множества
(подмножества) при
отображении 70

– элемента при отображении 70

Пространство 177

– метрическое 177

– – линейно связное 202

Прямая 107

– числовая 47

– – расширенная (пополненная) 50

Путь (дуга) 202

Равенство асимптотическое 361

Радиус окрестности точки 52

– полярный 151

Разложение функции
асимптотическое 369

Размещение 83

Разность действительных чисел 45

– комплексных чисел 152

– множеств (подмножеств) 54

Разность симметрическая 55

Распространение закона на
множество 143

Расстояние 177

Расширение множества 143

Символ включения 43

– логический 57

– принадлежности 42

Символы Ландау 387

Синус 128

– гиперболический 291

Система алгебраическая
(структура алгебраическая
основная) 144

– координат прямоугольная
декартова 77

– отсчета 46

Скачок функции 333

Соотношение рекуррентное 87

Сочетание 84

Способ задания функции
алгоритмический (программный)
117

– – – графический 116

– – – неявный аналитический 114

– – – описательный (словесный) 117

– – – параметрический 115

– – – табличный 116

– – – явный аналитический 108

Степень многочлена 132

Структура алгебраическая основная
(система алгебраическая) 144

Сужение отображения (функции) 73

Сумма действительных чисел 45

– дизъюнктивная 55

– комплексных чисел 152

– последовательностей 224

Суперпозиция (наложение) функций
117

Сфера 179

Схема (алгоритм) Горнера 158

Сюръекция 73

Тангенс 128

– гиперболический 291

Тело 144

Теорема 60

– алгебры основная 159

– Вейерштрасса (вторая) 340

– – (первая) 339

– обратная 60

– о промежуточном значении
непрерывной функции 205, 339

Тождество логарифмическое
основное 128

Точка бесконечная 50

– конечная 50

– множества внутренняя 184

– – граничная 184

– – изолированная 184

– – предельная 185

– непрерывности отображения 191

– – функции 332

– отображения неподвижная 100,
316

– последовательности предельная
242

– разрыва второго рода 335

– – отображения (функции) 191

– – первого рода 333

– – устранимого 334

– – функции 333

– сгущения последовательности 243

Транзитивность 43

Транспозиция перестановки 166

Треугольник Паскаля 85

Трехчлен квадратный 132

Угол полярный 151

Универсум 52

Уравнение двучленное 163

Условие достаточное 60

– Липшица 208

– необходимое 60

– теоремы 60

Форма представления

комплексного числа

алгебраическая 149

– – – – геометрическая 150

– – – – тригонометрическая 151

Формула Муавра возведения

комплексного числа в целую

положительную степень 154

– – извлечения корня целой

положительной степени из

комплексного числа 154

Функции бесконечно большие

несравнимые 372

– – – – одного порядка 372

– – – эквивалентные 373

– – малые несравнимые 357

– – – одного порядка 355

– – – эквивалентные 361

– взаимно обратные 75, 119

– одного порядка 388

– тригонометрические 128

– – обратные 129

– эквивалентные 390

– элементарные 131

– – основные 126

Функция 70, 106

– алгебраическая 134

– бесконечно большая 277

– – – более высокого порядка 372

**Функция бесконечно большая более
низкого порядка 372**

--- k -го порядка 373

--- положительная

(отрицательная) 277

--- при стремлении аргумента по
множеству 305

-- малая 274

--- более высокого порядка 356

---- низкого порядка 356

--- k -го порядка 358

--- по сравнению с другой
функцией 389

--- при стремлении аргумента по
множеству 297, 305

- векторная 71

- взаимно однозначная 74

- возрастающая на множестве 122

- действительная действительного
переменного 71, 106

- действительная (скалярная) 71

- действительного (вещественного)
переменного 71

- Дирихле 107

- дробно-линейная 133

- дробно-рациональная 133

- единичная Хевисайда 111

- знака 111

- инъективная 74, 119

- иррациональная 134

- линейная 132

- логарифмическая 127

- многозначная 114

- монотонная на множестве 122

- невозрастающая на множестве 122

- неограниченная на множестве 124

**Функция неотрицательная (поло-
жительная) при стремлении**

аргумента по множеству 305

- неположительная (отрицательная)
при стремлении аргумента по
множеству 305

- непрерывная в интервале 336

-- в точке 324, 325, 327

---- слева (справа) 332

-- на отрезке 336

-- равномерно на множестве 206

- не равная нулю при стремлении
аргумента по множеству 305

- неубывающая на множестве 122

- неубывающая (невозрастающая)
при стремлении аргумента по
множеству 310

- обратная 75, 119

- общего вида 124

- ограниченная 124

-- на множестве 124

-- по сравнению с другой
функцией 387

-- сверху (снизу) на множестве 124

---- при стремлении аргумента
по множеству 305

- периодическая 121

- показательная 127

- показательно-степенная 344

- разрывная 191

-- в точке 333

- рациональная 132

-- целая 133

- сложная 76, 117

- составная 110

- степенная 126

Функция, стремящаяся к бесконечности при стремлении аргумента к бесконечности 257
 — — — — при стремлении аргумента к конечной точке 255
 — — к точке сверху при стремлении аргумента к точке 262
 — строго монотонная 122
 — сюръективная 73
 — трансцендентная (неалгебраическая) 127
 — убывающая на множестве 122
 — четная (нечетная) 122
 — экспоненциальная 288

Центр окрестности точки 52
 — шара 179

Частное действительных чисел 46
 — комплексных чисел 153
 — последовательностей 224

Часть главная суммы бесконечно больших функций 373
 — — — — малых функций 366
 — действительная комплексного числа 149

— мнимая комплексного числа 149
 — целая 117

Числа комплексно сопряженные 150
 — Фибоначчи 218

Число алгебраическое 163

Число действительное 44

— — конечное 50
 — иррациональное 46
 — кардинальное 92
 — комплексное 149
 — натуральное 46
 — обратное 45
 — отрицательное 46
 — положительное 46
 — противоположное 45
 — рациональное 46
 — трансцендентное 163
 — целое 46
 — чисто мнимое 150

Шар 179

— замкнутый (открытый) 179

Шкала сравнения 358

Эквиваленция 58

Экспонента 288

Элемент комплексно сопряженный 148

— множества 42
 — нейтральный 140
 — последовательности 216
 — — предшествующий 216
 — — следующий 216
 — регулярный 139
 — симметризуемый 140
 — симметричный (обратный, противоположный) 140

ОГЛАВЛЕНИЕ

К читателю	5
Предисловие	13
Краткий исторический очерк	15
Основные обозначения	35
1. Элементы теории множеств	41
1.1. Множества	41
1.2. Подмножества	43
1.3. Множество действительных чисел. Числовая прямая	44
1.4. Операции над множествами	52
1.5. Некоторые основные логические символы	57
1.6. Круги Эйлера	63
Вопросы и задачи	66
2. Отображение множеств. Функции	70
2.1. Понятия отображения и функции	70
2.2. Сюръекция, инъекция и биекция	73
2.3. Обратное отображение	75
2.4. Композиция отображений	76
2.5. Произведение множеств. График отображения	77
2.6. Упорядоченные множества. Элементы комбинаторики	82
2.7. Ограниченные множества	87
Д.2.1. Мощность множества	92
Д.2.2. Неподвижная точка отображения	98
Вопросы и задачи	102
3. Действительные функции действительного переменного	106
3.1. Функция и ее график	106
3.2. Основные способы задания функции	108
3.3. Сложная и взаимно обратные функции	117
3.4. Некоторые свойства функций	121
3.5. Основные элементарные функции	125
3.6. Некоторые элементарные функции	131
Вопросы и задачи	134

4. Основные законы композиции и алгебраические структуры	138
4.1. Законы композиции	138
4.2. Основные алгебраические структуры	144
4.3. Поле комплексных чисел	147
4.4. Кольцо многочленов	156
4.5. Группа подстановок	164
Вопросы и задачи	170
5. Непрерывные отображения метрических пространств	177
5.1. Понятие метрического пространства	177
5.2. Окрестности в метрическом пространстве	179
5.3. Характерные точки множеств	184
5.4. Замкнутые множества	186
5.5. Компактные множества	188
5.6. Определение непрерывного отображения	191
5.7. Свойства непрерывного отображения множеств	196
5.8. Линейно связанные множества	202
5.9. Равномерная непрерывность	206
Вопросы и задачи	211
6. Числовые последовательности	215
6.1. Переменные величины	215
6.2. Понятие числовой последовательности	216
6.3. Предел последовательности	220
6.4. Свойства сходящихся последовательностей	222
6.5. Признаки существования предела последовательности	230
6.6. Число ϵ	234
6.7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности	236
Д.6.1. Предельные точки последовательности	242
Д.6.2. Доказательство признака Вейерштрасса и критерия Коши	245
Вопросы и задачи	248
7. Предел функции в точке	251
7.1. Определение предела функции	251
7.2. Односторонние пределы	259
7.3. Признаки существования предела	265
7.4. Свойства функций, имеющих конечный предел	271

7.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	274
7.6. Предел сложной функции	281
7.7. Два замечательных предела	283
7.8. Экспонента, натуральные логарифмы и гиперболиче- ские функции	288
Вопросы и задачи	292
8. Теория пределов	295
8.1. Понятие предела отображения	295
8.2. Некоторые свойства предела отображения	303
8.3. Пределы действительных функций	304
8.4. Признаки существования предела действительной фун- кции	309
Д.8.1. Полное метрическое пространство	314
Д.8.2. Принцип сжимающих отображений	315
Вопросы и задачи	320
9. Непрерывные функции	322
9.1. Непрерывность функции в точке	324
9.2. Свойства функций, непрерывных в точке	328
9.3. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва	332
9.4. Свойства функций, непрерывных в промежутке	336
9.5. Непрерывность основных элементарных функций	341
9.6. О вычислении нуля функции, непрерывной на отрезке	345
Д.9.1. Непрерывность и разрывы монотонной функции	348
Д.9.2. Доказательство теорем о функциях, непрерывных в промежутке	350
Вопросы и задачи	352
10. Асимптотическое поведение	355
10.1. Сравнение бесконечно малых функций	355
10.2. Эквивалентные бесконечно малые функции	360
10.3. Главная часть бесконечно малой функции	365
10.4. Сравнение бесконечно больших функций	372
10.5. Наклонная асимптота графика функции :	375
10.6. Общие рекомендации по вычислению пределов	377
Д.10.1. Асимптотические многочлены	384
Д.10.2. Об использовании символов O и o	387
Вопросы и задачи	390
Список рекомендуемой литературы	393
Предметный указатель	397

Учебное издание

**Математика в техническом университете
Выпуск I**

Морозова Валентина Дмитриевна

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Редактор *Н.Г. Ковалевская*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Е.В. Авалова*

ЛР № 020523 от 23.04.92

Сдано в набор 25.10.96. Подписано в печать 25.12.96
Формат 60×88 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. л. 25,5. Уч.-изд. л. 23,64.
Тираж 2000 экз. Изд. № 110. Заказ № 644

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана,
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ
140010, Люберцы, Октябрьский пр., 403